

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 4

28. Juni 2017

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Betrachten Sie die *Heisenberggruppe*

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$. Sei $N \subseteq H_3(\mathbb{R})$ die Untergruppe derjenigen Matrizen, für die $a = b = 0$ ist.

- Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in $H_3(\mathbb{R})$ ist.
- Zeigen Sie, dass N das Zentrum von $H_3(\mathbb{R})$ ist.
- Zeigen Sie, dass A und $A' \in H_3(\mathbb{R})$ genau dann die gleiche Linksnebenklasse bezüglich N definieren, wenn ihre Einträge außerhalb der rechten oberen Ecke übereinstimmen.
- Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : H_3(\mathbb{R})/N &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &\longmapsto (a, b), \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und zeigen Sie, dass es sich um einen Gruppenisomorphismus handelt, wobei $[A] = AN$ die Nebenklasse von $A \in H_3(\mathbb{R})$ in der Faktorgruppe $H_3(\mathbb{R})/N$ bezeichnet.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit $\text{Aut}(G) = \{\text{id}\}$. Zeigen Sie:

- G ist abelsch.
- Für alle $g \in G$ gilt $g^2 = 1$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^n , $n \geq 1$.

- Zeigen Sie, dass die Größe aller Konjugationsklassen eine p -Potenz ist.
- Folgern Sie mit Hilfe der Klassengleichung, dass G nichttriviales Zentrum hat: $Z(G) \neq \{1\}$.

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn $G \neq 1$ ist und G keinen Normalteiler außer 1 und G besitzt.

- (a) Bestimmen Sie alle einfachen abelschen Gruppen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass G zyklisch sein muss. Benutzen Sie dann, dass gemäß Aufgabe 6(c) die Untergruppen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in Bijektion zu den Teilern von n stehen.

- (b) Bestimmen Sie alle einfachen Gruppen G , deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **5. Juli 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA
