**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Sommersemester 2017
29 Juni 2017

**Lineare Algebra**
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

# Übungsblatt 11

**Aufgabe 1. (4 Punkte)** *Seien $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ zwei $K$-Untervektorräume. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

*(a)* $U_1 \cup U_2$ *ist ein $K$-Untervektorraum von $V$.*

*(b) Es gilt* $U_1 \subset U_2$ *oder* $U_2 \subset U_1$.

**Aufgabe 2. (4 Punkte)** *Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:*

*(a)* $\varphi : V \to V$, *wobei* $\varphi(v_1, v_2, v_3)^t := (\exp(v_1), v_3, v_2)^t$.

*(b)* $\varphi : V \to \mathbb{R}$, *wobei* $\varphi(v_1, v_2, v_3)^t := \sin(v_1 v_2 v_3)$.

*(c)* $\varphi : V \to V$, *wobei* $\varphi(v_1, v_2, v_3)^t := (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)^t$.

*(d)* $\varphi : V \to V$, *wobei* $\varphi(v_1, v_2, v_3)^t := (v_1 + a, v_2 + b, v_3 + c)^t$, *mit* $(a, b, c)^t \in V$ *fest.*

**Aufgabe 3. (4 Punkte)** *Seien $K$ ein Körper und $V = K^n$. Betrachten Sie für $i = 1, \dots, n$ die Projektionen $\pi_i : V \to K$ auf die $i$-te Komponente, d.h.*

$$\pi_i((x_1, \dots, x_n)^t) = x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

*a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\pi_i$ für $i = 1, \dots, n$ $K$-linear sind.*

*b) Sei $W$ ein $K$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $\varphi : W \to V$ genau dann $K$-linear ist, wenn alle Kompositionen $\pi_i \circ \varphi : W \to K$, $K$-linear sind.*

**Aufgabe 4.** *Gegeben sei die Matrix $A$ über $\mathbb{R}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Betrachten Sie die lineare Abbildung* $\lambda_A : V \to W, \quad v \mapsto \lambda_A(v) := Av$, *wobei* $V = \mathbb{R}^4$ *und* $W = \mathbb{R}^3$ *sind.*

---

**Abgabe** bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 6. Juli** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

(a) *Bestimmen Sie je eine Basis von* $\mathrm{Kern}(f) \subset V$ *und von* $\mathrm{Bild}(f) \subset W$.

(b) *Berechnen Sie die Dimensionen von* $\mathrm{Kern}(f)$ *und von* $\mathrm{Bild}(f)$.