Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 5 5. Juni 2017

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_7.$$

(a) Schreiben Sie σ und τ jeweils in Zykelschreibweise.

(b) Sind σ und τ in S_7 konjugiert?

(c) Bestimmen Sie jeweils das Signum und die Ordnung von σ und τ.

(d) Bestimmen Sie $\sigma\tau\sigma^{-1}$ in Zykelschreibweise.

Aufgabe 18. (4 Punkte)

(a) Wie viele Konjugationsklassen besitzt S_6?

(b) Sei $N \subseteq S_n$ ein Normalteiler, der eine Transposition enthält. Zeigen Sie $N = S_n$.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ und welche Partitionen $n = n_1 + \ldots + n_r$ enthält die zugehörige Konjugationsklasse in S_n nur ein Element? Bestimmen Sie $Z(S_n)$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 19. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels des Homomorphiesatzes, dass die Abbildung $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times$, $x \mapsto x^2$, einen Isomorphismus $\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$ induziert.

(b) Seien G, H zwei Gruppen. Leiten Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes einen Isomorphismus $(G \times H)/H \cong G$ her.

— bitte wenden —

Aufgabe 20. (4 Punkte)

Der *Kommutator* zweier Gruppenelemente $g, h \in G$ ist definiert als $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Die *Kommutatoruntergruppe* $[G, G] \subseteq G$ ist die Untergruppe, die von allen Kommutatoren erzeugt wird. Zeigen Sie:

(a) $gh = [g, h]hg$.

(b) $gh = hg \;\Leftrightarrow\; [g, h] = 1$.

(c) $[G, G] = 1 \;\Leftrightarrow\; G$ ist abelsch.

(d) Ist $f : G \to H$ ein Homomorphismus, so gilt $f([G, G]) \subseteq [H, H]$. Wenn f surjektiv ist, gilt Gleichheit.

(e) Jeder Automorphismus von G schränkt sich zu einem Automorphismus von $[G, G]$ ein. Folgern Sie: $[G, G] \subseteq G$ ist ein Normalteiler.

(f) $G/[G, G]$ ist abelsch.

(g) Ist $f : G \to A$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe, gilt $[G, G] \subseteq \ker(f)$.

(h) $[S_n, S_n] \subseteq A_n$. Berechnen Sie $[(1\,3), (1\,2)]$ und zeigen Sie $A_n = [S_n, S_n]$ für alle n.
Hinweis: A_n wird von den 3-Zykeln erzeugt.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **12. Juli 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`
