Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
6 Juli 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Seien K ein Körper und $V := K[T]_3$ der K-Vektorraum aller Polynome von Grad ≤ 3, d.h.*

$$K[T]_3 = \left\{ P = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in K[T] : n \leq 3 \right\}.$$

Betrachten Sie die Abbildung $f : V \to K^2$, die durch

$$f\left(\sum_{i=0}^{3} a_i T^i\right) := \left(\sum_{i=0}^{3} a_i, a_1\right)$$

definiert ist.

(a) *Zeigen Sie, dass die Abbildung f linear ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A(f)^B_C$ von f bezüglich der Basis $B = (1, T, T^2, T^3)$ von V und der kanonischen Basis $C = (e_1, e_2)$ von K^2.*

(c) *Bestimmen Sie den Rang von f.*

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Seien V_1, V_2, V_3 endlich-dimensionale K-Vektorräume und*

$$f : V_1 \to V_2, \quad g : V_2 \to V_3$$

lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) - \dim(V_2) \leq \operatorname{rang}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g)\}.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Betrachten Sie die lineare Abbildung $\lambda_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 13. Juli** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

a) Zeigen Sie, dass

$$B = ((1,-1,-1)^t, (-1,2,1)^t, (1,-1,0)^t), \quad C = ((2,-3,0)^t, (-1,2,0)^t, (-1,2,1)^t)$$

Basen von $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrizen $A(\lambda_A)^B_B, A(\lambda_A)^B_C, A(\lambda_A)^C_C$.

Aufgabe 4. *Betrachten Sie die folgende Matrizen über $\mathbb{R}$*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen A, B, C, D und die entsprechenden Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix S_C, so dass

$$S_C C S_C^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.