Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Präsenzaufgabenblatt 6 12. Juli 2017

Aufgabe P21.

Sei R ein kommutativer Ring (wie immer mit Eins) und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) Gilt $1 \in I$, so ist $I = R$.

(b) Enthält I eine Einheit, so ist $I = R$.

Folgern Sie, dass ein Körper K nur die beiden trivialen Ideale (0) und K besitzt.

Aufgabe P22.

Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

(a) Ist A ein Menge und $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Idealen in R, so ist der Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ ebenfalls ein Ideal.

(b) Ist $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R, so ist die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ebenfalls ein Ideal.

Aufgabe P23.

Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f Einheiten auf Einheiten abbildet und durch Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus $f : R^\times \to S^\times$ induziert.

Aufgabe P24.

Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ *idempotent*, d. h. es gilt $e^2 = e$. Zeigen Sie:

(a) $f := 1 - e$ ist auch idempotent und es gilt $ef = 0$.

(b) $Re := \{xe : x \in R\}$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement e.

(c) Multiplikation mit e ist ein Ringhomomorphismus $R \to Re$ mit Kern Rf.

(d) Die Abbildung $\varphi : R \to Re \times Rf$, $\varphi(x) = (xe, xf)$ ist ein Isomorphismus von Ringen.

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern wird in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`