Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
6 Juli 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Seien K ein Körper und $V := K[T]_3$ der K-Vektorraum aller Polynome von Grad ≤ 3, d.h.*

$$K[T]_3 = \left\{ P = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in K[T] : n \leq 3 \right\}.$$

Betrachten Sie die Abbildung $f : V \to K^2$, die durch

$$f\left(\sum_{i=0}^{3} a_i T^i\right) := \left(\sum_{i=0}^{3} a_i, a_1\right)$$

definiert ist.

(a) *Zeigen Sie, dass die Abbildung f linear ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A(f)_C^B$ von f bezüglich der Basis $B = (1, T, T^2, T^3)$ von V und der kanonischen Basis $C = (e_1, e_2)$ von K^2.*

(c) *Bestimmen Sie den Rang von f.*

Lösung. (a) Seien $P = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i, Q = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i \in K[T]_3$, dann ist

$$f(P+Q) = \left(\sum_{i=0}^{3} (a_i + b_i), a_1 + b_1\right) = f(P) + f(Q).$$

Analog haben wir, dass für alle $a \in K$ und alle $P \in K[T]_3$ gilt:

$$f(aP) = \left(\sum_{i=0}^{3} aa_i, aa_1\right) = af(P).$$

D.h. f ist linear.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 13. Juli** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

(b) Da

$$f(1) = (1,0), \quad f(T) = (1,1), \quad f(T^2) = (1,0), \quad f(T^3) = (1,0),$$

ist

$$A(f)_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Da $f(1)$ und $f(T)$ linear unabhängig sind, ist $\text{rang}(f) = 2$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Seien V_1, V_2, V_3 endlich-dimensionale K-Vektorräume und*

$$f : V_1 \to V_2, \quad g : V_2 \to V_3$$

lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$\text{rang}(f) + \text{rang}(g) - \dim(V_2) \leq \text{rang}(g \circ f) \leq \min\{\text{rang}(f), \text{rang}(g)\}.$$

Lösung. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, haben wir:

$$\dim(V_2) = \dim(\text{Kern}(g)) + \text{rang}(g),$$

d.h.

$$\dim(V_2) + \text{rang}(f) = \dim(\text{Kern}(g)) + \text{rang}(g) + \text{rang}(f).$$

Nun betrachten wir den Untervektorraum $W := \text{Bild}(f) \subset V_2$ und die lineare Abbildung $g_{|W} : W \to V_3$, $w \mapsto g_{|W}(w) := g(w)$. Dann ist

$$\dim(W) = \text{rang}(f) = \dim(\text{Kern}(g_{|W})) + \text{rang}(g_{|W}).$$

Da $\text{Kern}(g_{|W}) = \text{Kern}(g) \cap W$ und $\text{Bild}(g_{|W}) = \text{Bild}(g \circ f)$, erhalten wir

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Kern}(g_{|W})) + \text{rang}(g \circ f) \leq \dim(\text{Kern}(g)) + \text{rang}(g \circ f).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{rang}(f) + \text{rang}(g) - \dim(V_2) &= \text{rang}(f) - \dim(\text{Kern}(g)) \\ &\leq \text{rang}(g \circ f). \end{aligned}$$

Da $\text{Bild}(g \circ f) \subset \text{Bild}(g)$ ist, ist $\text{rang}(g \circ f) \leq \text{rang}(g)$. Offenbar ist $\text{rang}(g \circ f) \leq \text{rang}(f)$ und daher kriegen wir, dass

$$\text{rang}(g \circ f) \leq \min\{\text{rang}(f), \text{rang}(g)\}.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Betrachten Sie die lineare Abbildung* $\lambda_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) *Zeigen Sie, dass*

$$B = ((1,-1,-1)^t, (-1,2,1)^t, (1,-1,0)^t), \quad C = ((2,-3,0)^t, (-1,2,0)^t, (-1,2,1)^t)$$

Basen von $\mathbb{R}^3$ *sind.*

b) *Bestimmen Sie die Koordinatenmatrizen* $A(\lambda_A)^B_B, A(\lambda_A)^B_C, A(\lambda_A)^C_C$.

Lösung. (a) Da

$$\alpha(1,-1,-1)^t + \beta(-1,2,1)^t + \gamma(1,-1,0)^t = 0$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ hat, ist B linear unabhängig. Da $\langle B \rangle = \mathbb{R}^3$, folgt dass B eine Basis ist. Analog für C.

(b) Da

$$\begin{aligned} \lambda_A((1,-1,-1)^t) &= (1,-1,-1)^t, \\ \lambda_A((-1,2,1)^t) &= (-1,3,1)^t = (1,-1,-1)^t + 2(-1,2,1)^t, \\ \lambda_A((1,-1,0)^t) &= (2,0,1)^t = (1,-1,-1)^t + 2(-1,2,1)^t + 3(1,-1,0)^t. \end{aligned}$$

Haben wir, dass

$$A(\lambda_A)^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{aligned} \lambda_A((1,-1,-1)^t) &= (1,-1,-1)^t = (2,-3,0)^t + 2(-1,2,0)^t - (-1,2,1)^t, \\ \lambda_A((-1,2,1)^t) &= (-1,3,1)^t = (2,-3,0)^t + 2(-1,2,0)^t + (-1,2,1)^t, \\ \lambda_A((1,-1,0)^t) &= (2,0,1)^t = 4(2,-3,0)^t + 5(-1,2,0)^t + (-1,2,1)^t. \end{aligned}$$

Haben wir, dass

$$A(\lambda_A)^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{aligned}
\lambda_A((2,-3,0)^t) &= (4,-2,2)^t = 6(2,-3,0)^t + 6(-1,2,0)^t + 2(-1,2,1)^t,\\
\lambda_A((-1,2,0)^t) &= (-2,2,-1)^t = -2(2,-3,0)^t - (-1,2,0)^t - (-1,2,1)^t,\\
\lambda_A((-1,2,1)^t) &= (-1,3,1)^t = (2,-3,0)^t + 2(-1,2,0)^t + (-1,2,1)^t.
\end{aligned}$$

Haben wir, dass

$$A(\lambda_A)_C^C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *Betrachten Sie die folgende Matrizen über* $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen* A, B, C, D *und die entsprechenden Eigenvektoren.*

(b) *Bestimmen Sie eine Matrix* S_C*, so dass*

$$S_C C S_C^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Lösung. (a) Die Eigenwerte sind:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{A,1} = 10, \quad \lambda_{A,2} = -3.\\
&\lambda_{B,1} = 1, \quad \lambda_{B,2} = 7.\\
&\lambda_{C,1} = 2 \quad \lambda_{C,2} = 4, \quad \lambda_{C,3} = 6.\\
&\lambda_{D,1} = 1, \quad \lambda_{D,2} = 1, \quad \lambda_{D,3} = 0, \quad \lambda_{D,4} = 13.
\end{aligned}$$

und die entsprechende Eigenvektoren sind:

$$\begin{aligned}
&v_{A,1} = (1,1)^t, \quad v_{A,2} = (-6,7)^t.\\
&v_{B,1} = (-1,1)^t, \quad v_{B,2} = (2,1)^t.\\
&v_{C,1} = (0,-1,1)^t, \quad v_{C,2} = (1,1,0)^t, \quad v_{C,3} = (-1,0,1)^t.\\
&v_{D,1} = (-1,0,0,1)^t, \quad v_{D,2} = (-1,1,0,0)^t, \quad v_{D,3} = (2,2,-1,2)^t \quad v_{D,4} = (1,1,6,1)^t.
\end{aligned}$$

(b) Die Matrix S_C^{-1} ist

$$S_C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$