Aufgabe 1

[10 Punkte]

Betrachten Sie das folgende inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 8 \\
-\lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \\
-x_2 + x_3 + x_4 &= 0,
\end{aligned}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

(a) Für welche reellen Zahlen λ ist die Lösung des Gleichungssystems eindeutig?

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses System für $\lambda = -8/12$.

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : V \to V$, gegeben durch $\varphi(X) = AXA^t$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix bezüglich der kanonischen Basis von V.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Betrachten Sie die Untervektorräume U, V des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U_1 : &= \langle (1,0,1,2)^t, (1,1,0,3)^t \rangle \\ U_2 : &= \langle (1,-1,1,1)^t, (4,0,1,1)^t \rangle. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Dimensionen von U_1 und von U_2.

(b) Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Betrachten Sie die Abbildung $\lambda_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von λ_A.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix S so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(c) Betrachten Sie die Matrix $B := A^4 + A + 3E_2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.