Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 6 mit Lösungen 12. Juni 2017

Aufgabe 21. (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $R := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ der Ring der Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(b) Sei $S \subseteq R$ die Teilmenge der beschränkten Funktionen, d. h. f liegt in S, wenn $C \geq 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass S ein Unterring von R ist.

(c) Beschreiben Sie die Einheitengruppen $R^\times$ und $S^\times$.

(d) Sei $I \subseteq R$ die Teilmenge der Funktionen, so dass $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass I ein Ideal in R ist. Für welche X ist I sogar ein Unterring?

Lösungsskizze zu Aufgabe 21:

(a) Die Ringeigenschaften von $\mathbb{R}$ übertragen sich auf R. Zu zeigen ist im Einzelnen:
- Addition ist assoziativ: $(f+g)+h = f+(g+h)$.
- Addition ist kommutativ: $f+g = g+f$.
- Die konstante Nullfunktion ist additives neutrales Element: $f+0 = 0+f = f$.
- Das additive Inverse von f ist $(-f)(x) := -f(x)$.
- Multiplikation ist assoziativ: $(fg)h = f(gh)$.
- Multiplikation ist kommutativ: $fg = gf$.
- Die konstante Funktion mit Wert 1 ist das Einselement: $1f = f1 = f$.
- Es gelten die Distributivgesetze $(f+g)h = fh + gh$, $f(g+h) = fg + fh$.

Beispielhaft der Beweis des ersten Distributivgesetzes: Für $f, g, h \in R$ und alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)\ h(x) && \text{(Definition von } \cdot\text{)} \\
&= (f(x)+g(x))\ h(x) && \text{(Definition von } +\text{)} \\
&= f(x)h(x) + g(x)h(x) && \text{(Distributivgesetz in } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (fh)(x) + (gh)(x) && \text{(Definition von } \cdot\text{)} \\
&= (fh+gh)(x) && \text{(Definition von } +\text{)}
\end{aligned}$$

und damit $(f+g)h = fh + gh$.

(b) Es gilt $0 \in S$, da die Nullfunktion durch 0 beschränkt ist. Sind $f, g \in S$ beschränkt durch $C, D \geq 0$, so gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq C + D,$$

für alle $x \in X$, somit ist $f+g$ durch $C+D$ beschränkt und damit $f+g \in S$. Mit $f \in S$ ist wegen $|-f(x)| = |f(x)|$ auch $-f \in S$. Damit ist $S \subseteq R$ eine Untergruppe bezüglich Addition. Es gilt $1 \in S$, da die Funktion durch 1 beschränkt ist. Sind $f, g \in S$ durch C, D beschränkt, so ist wegen $|f(x)\, g(x)| = |f(x)|\, |g(x)|$ das Produkt fg durch CD beschränkt und somit $fg \in S$. Damit ist S ein Unterring.

(c) Ist $f \in R^\times$, gibt es $g \in R$ mit $fg = 1$. Für alle $x \in X$ gilt dann $f(x)\, g(x) = 1$, also $f(x) \neq 0$. Ist umgekehrt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist durch $g(x) := 1/f(x)$ ein multiplikatives Inverses von f gegeben. Also besteht $R^\times$ aus den Funktionen, die nirgends den Wert 0 haben.

Man überlege sich, dass $f \in S$ genau dann eine Einheit in S ist, wenn f eine Einheit in R ist, deren Inverses f^{-1} in S liegt. Es muss also $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ gelten und sowohl f und f^{-1} müssen beschränkt sein. Damit besteht $S^\times$ aus den Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, für die Konstanten $C, c > 0$ existieren, so dass

$$c \leq |f(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in X.$$

(d) Es gilt $0(x) = 0$ für alle $x \in X$, also $0 \in I$. Sind $f, g \in I$ und sind $E, F \subseteq X$ endliche Teilmengen, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin E$ und $g(x) = 0$ für alle $x \notin F$ gilt, dann gilt $(f+g)(x) = 0$ für alle $x \notin E \cup F$. Da $E \cup F$ als Vereinigung zweier endlicher Mengen endlich ist, gilt $f + g \in I$. Ist $f \in I$ und $g \in R$, dann gilt $(gf)(x) = 0$ für alle $x \in X$, für die $f(x) = 0$ gilt, und das sind alle bis auf endliche viele, also gilt $gf \in I$. Damit ist $I \subseteq R$ ein Ideal.

Falls I ein Unterring ist, gilt $1 \in I$. Da $1(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in X$, muss X endlich sein. In diesem Fall ist die Endlichkeitsbedingung trivial und es gilt $I = R$, trivialerweise ein Unterring.

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Sei X eine Menge und R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $V \subseteq X$ eine Teilmenge und $I(V) \subseteq \mathrm{Abb}(X, R)$ die Menge aller $f : X \to R$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $I(V)$ ein Ideal in $\mathrm{Abb}(X, R)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X, R) \to \mathrm{Abb}(V, R)$, $f \mapsto f|_V$, surjektiv ist.

(c) Leiten Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Ringe einen Isomorphismus

$$\mathrm{Abb}(X, R)/I(V) \cong \mathrm{Abb}(V, R)$$

her.

Lösungsskizze zu Aufgabe 22:

(a) $I(V)$ ist der Kern des Einschränkungshomomorphismus $f \mapsto f|_V$ und Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale. Wir überprüfen trotzdem noch einmal die Idealaxiome von Hand. Die Null in $\operatorname{Abb}(X, R)$ ist die konstante Nullfunktion 0 und für diese gilt offensichtlich $0 \in I(V)$. Sind $f, g \in I(V)$, dann gilt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$$

für alle $x \in V$ und damit $f + g \in I(V)$. Ist $f \in I(V)$ und $g \in \operatorname{Abb}(X, R)$, gilt

$$(gf)(x) = g(x)\, f(x) = g(x) \cdot 0 = 0$$

für alle $x \in V$ und somit $gf \in I(V)$. Damit ist $I(V)$ ein Ideal.

(b) Für $g \in \operatorname{Abb}(V, R)$ definiere $f \in \operatorname{Abb}(X, R)$ durch „Fortsetzung durch Null“ von g, d. h.

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in V, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f|_V = g$, d. h. f ist ein Urbild von g unter der Einschränkungsabbildung.

(c) Bezeichne res_V die Einschränkungsabbildung $\operatorname{Abb}(X, R) \to \operatorname{Abb}(V, R)$. Dann gilt $\ker(\operatorname{res}_V) = I(V)$ und $\operatorname{im}(\operatorname{res}_V) = \operatorname{Abb}(V, R)$. Nach dem Homomorphiesatz ist die Abbildung $f + I(V) \mapsto f|_V$ ein Ringisomorphismus $\operatorname{Abb}(X, R)/I(V) \cong \operatorname{Abb}(V, R)$.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden Ring R genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt.

(b) Gibt es einen Ring T, so dass es für jeden Ring R genau einen Ringhomomorphismus $R \to T$ gibt?

(c) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(d) Sei K ein Körper und R ein Ring, der nicht der Nullring ist. Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus $f : K \to R$ injektiv ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 23:

(a) *Eindeutigkeit:* Seien $f, g : \mathbb{Z} \to R$ zwei Ringhomomorphismen. Dann ist $f - g$ ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (R, +)$ und somit der Kern $\ker(f-g) \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe. Wir müssen zeigen, dass $\ker(f - g) = \mathbb{Z}$ gilt. Wegen $f(1) = g(1) = 1$ ist 1 enthalten und damit ist $\ker(f - g) = \mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$ als Gruppe von 1 erzeugt wird.
Existenz: Wir definieren $f : \mathbb{Z} \to R$ durch $f(n) = n1$, d. h. es gilt $f(0) = 0$, $f(n) = 1 + \ldots + 1$ (eine Summe von n Einsen) und $f(-n) = -f(n)$ für $n \geq 0$. Nach Vorlesung handelt es sich um einen additiven Gruppenhomomorphismus. Es gilt $f(1) = 1$ und es bleibt nur noch zu zeigen, dass f multiplikativ ist, also

$$(n1)(m1) = (nm)1 \quad \text{für alle } nm \in \mathbb{Z}.$$

Für festes $m \in \mathbb{Z}$ überprüft man leicht, dass die Menge aller $n \in \mathbb{Z}$, für welche die Behauptung stimmt, eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist, die 1 enthält, also ganz $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Für den Nullring $T = \{0\}$ gilt, dass die Nullabbildung $f : R \to \{0\}$ für jeden Ring R ein Ringhomomorphismus ist. Die Homomorphismusbedingungen sind Gleichungen in $\{0\}$ und damit trivialerweise erfüllt.

(c) Es gibt keinen Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Für einen solchen würde gelten:

$$0 = f(0) = f(4) = 4f(1) = 4,$$

aber es ist $4 \neq 0$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(d) Sei K ein Körper, R nicht der Nullring und $f : K \to R$ ein Ringhomomorphismus. Wir müssen $\ker(f) = \{0\}$ zeigen. Sei $x \in K$ und $x \neq 0$, dann gibt es $y \in K$ mit $xy = 1$. Daraus folgt $f(x)f(y) = 1$. Wäre $f(x) = 0$, würde $0 = 1$ in R folgen, aber R ist nicht der Nullring, also $f(x) \neq 0$.

Aufgabe 24. (4 Punkte)

Seien R und S Ringe.

(a) Zeigen Sie, dass $R \times S$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Projektionsabbildungen

$$\begin{aligned} p &: R \times S \to R, \quad p(r,s) = r, \\ q &: R \times S \to S, \quad q(r,s) = s, \end{aligned}$$

Ringhomomorphismen sind.

(c) Ist die Inklusionsabbildung $i : R \to R \times S$, $i(r) = (r, 0)$, ein Ringhomomorphismus?

(d) Zeigen Sie: Ist T ein weiterer Ring und sind $f : T \to R$, $g : T \to S$ Ringhomomorphismen, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\varphi : T \to R \times S$ mit $p \circ \varphi = f$ und $q \circ \varphi = g$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 24:

(a) Die Ringeigenschaften von R und S übertragen sich auf $R \times S$. Die Null ist $(0, 0)$ und die Eins ist $(1, 1)$. Wir überprüfen beispielhaft das erste Distributivgesetz: Für $x_i = (r_i, s_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)x_3 &= ((r_1, s_1) + (r_2, s_2)) \cdot (r_3, s_3) \\ &= (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \cdot (r_3, s_3) && \text{(komponentenweise +)} \\ &= ((r_1 + r_2)r_3, (s_1 + s_2)s_3) && \text{(komponentenweise $\cdot$)} \\ &= (r_1r_3 + r_2r_3, s_1s_3 + s_2s_3) && \text{(Distributivgesetz in R und S)} \\ &= (r_1r_3, s_1s_3) + (r_2r_3, s_2s_3) && \text{(komponentenweise +)} \\ &= (r_1, s_1) \cdot (r_3, s_3) + (r_2, s_2) \cdot (r_3, s_3) && \text{(komponentenweise $\cdot$)} \\ &= x_1x_3 + x_2x_3. \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen nur, dass p ein Ringhomomorphismus ist, denn der Beweis für q geht analog. Es gilt $p(1, 1) = 1$,

$$p((r_1, s_1) + (r_2, s_2)) = p(r_1 + r_2, s_1 + s_2) = r_1 + r_2 = p(r_1, s_1) + p(r_2, s_2),$$

und

$$p((r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2)) = p(r_1r_2, s_1s_2) = r_1r_2 = p(r_1, s_1)\, p(r_2, s_2).$$

(c) Die Inklusionsabbildung ist additiv und multiplikativ, aber aus

$$(1,1) = i(1) = (1,0)$$

folgt $1 = 0$ in S, d. h. S ist der Nullring. Nur in diesem Fall handelt es sich um einen Ringhomomorphismus.

(d) Definiere $\varphi : T \to R \times S$ durch $\varphi(t) := (f(t), g(t))$. Mit f und g ist auch φ ein Ringhomomorphismus, denn es gilt $\varphi(1) = (f(1), g(1)) = (1,1)$,

$$\begin{aligned}\varphi(t_1 + t_2) &= (f(t_1 + t_2), g(t_1 + t_2)) \\ &= (f(t_1) + f(t_2), g(t_1) + g(t_2)) \\ &= (f(t_1), g(t_1)) + (f(t_2), g(t_2)) \\ &= \varphi(t_1) + \varphi(t_2)\end{aligned}$$

und genauso $\varphi(t_1 t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$. Es gilt $(p \circ \varphi)(t) = p(f(t), g(t)) = f(t)$, also $p \circ \varphi = f$ und analog $q \circ \varphi = g$. Für die Eindeutigkeit beobachten wir, dass für alle $x \in R \times S$ gilt: $x = (p(x), q(x))$. Ist also $\varphi : T \to R \times S$ irgendeine Abbildung mit $p \circ \varphi = f$ und $q \circ \varphi = g$, so gilt

$$\varphi(t) = (p(\varphi(t)), q(\varphi(t)) = (f(t), g(t)),$$

d. h. φ ist eindeutig durch die beiden Bedingungen festgelegt.