Musterlösungen zur Geometrie–Nachklausur vom 28.9.17
(mit ein paar Erklärungen in Klammern zu den ersten beiden Aufgaben)

1. p sei eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ bezeichne den Körper mit p Elementen.

a) Wieviele Punkte besitzen die Geraden der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_p)$? p

b) Wieviele Geraden der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_p)$ gehen durch einen festen Punkt P ? $p+1$

c) Wieviele Geraden besitzt die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$ insgesamt? $p^2 + p + 1$
(= Anzahl der Punkte wegen Dualität, also $(p^3 - 1)/(p - 1)$)

d) Analog: Wieviele Ebenen besitzt der projektive Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_p)$? $p^3 + p^2 + p + 1$
(= Anzahl der Punkte wegen Dualität, also $(p^4 - 1)/(p - 1)$)

2. Die Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ sei durch die Gleichung $3x - 4y = 5$ gegeben.

a) Die Punkte (x, y) des $\mathbb{R}^2$, welche von g den gleichen Abstand wie vom Nullpunkt haben, sind durch folgende (Polynom–)Gleichung gegeben: (Hesse–Normalform, Quadrieren $\Rightarrow$)

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy + 30x - 40y - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4x + 3y)^2 = 10(4y - 3x) + 25$$

b) Die Menge K dieser Punkte bildet eine **Parabel**
(mit g als Leitlinie und Nullpunkt als Brennpunkt)

c) K lässt sich zu einer Kurve $\overline{K}$ in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ erweitern. Diese wird durch die folgende homogene Gleichung in x, y, t beschrieben:

$$(4x + 3y)^2 \ = \ 40yt - 30xt + 25t^2$$

d) Wieviele unendlich ferne Punkte kommen dabei zu K hinzu? **Einer**
(wie bei jeder Parabel, hier in homogenen Koordinaten $[x, y, t] = [3, -4, 0]$.

3. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, φ eine selbstadjungierte lineare Abbildung $V \to V$.

a) Zeigen Sie: Wenn φ nur Eigenwerte ≥ 0 besitzt, hat φ^2 die gleichen Eigenräume wie φ .

b) Gilt die Aussage aus Teil a) auch noch, wenn man auf die Voraussetzung über die Eigenwerte verzichtet? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung. a) Wegen des Spektralsatzes darf man annehmen, dass wir eine Orthonormalbasis haben, in der φ durch eine Diagonalmatrix A gegeben ist, mit Diagonalelementen $d_k \geq 0$. Dann ist A^2 ebenfalls diagonal mit Diagonalelementen d_k^2 und wegen

$$d_k = d_j \quad \Leftrightarrow \quad d_k^2 = d_j^2$$

hat A^2 die gleichen Eigenräume wie A.

b) Nein. Ein Gegenbeispiel zur Aussage von a) liefert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Gegeben ein Dreieck in der euklidischen Ebene $E^2 = \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten A, B, C, Seitenlängen a, b, c, Seitenhalbierenden der Längen s_a, s_b, s_c und mit Schwerpunkt S. Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über euklidische Vektorräume:

a) $S = 0$ (Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$) genau dann, wenn $A + B + C = 0$. (8 Punkte)

b) $$4(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \text{(12 Punkte)}$$

Tipp für b): Wählen Sie die Koordinaten in E^2 so, dass Sie die Aussage von a) verwenden können.

Lösung. a) Die Behauptung folgt z.B. daraus, dass ganz unabhängig von der Lage des Dreiecks $S = \frac{1}{3}(A+B+C)$ ist, da dieser Punkt alle drei Strecken zwischen den Eckpunkten und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten – z.B. zwischen A und $\frac{1}{2}(B + C)$ – im Verhältnis $2 : 1$ teilt.

b) Jetzt sei o.B.d.A. $S = 0 = A + B + C$. Wegen des erwähnten Teilungsverhältnisses ist

$$||A|| = \frac{2}{3}\, s_a\,, \quad ||B|| = \frac{2}{3}\, s_b\,, \quad ||C|| = \frac{2}{3}\, s_c\,, \quad 9 \cdot ||A||^2 = 4 \cdot s_a^2 \quad \text{etc.},$$

ferner

$$a^2 = ||B - C||^2 = \langle B - C, B - C\rangle = ||B||^2 - 2\langle B, C\rangle + ||C||^2 \quad ,$$

und mit den analogen Formeln für b und c, Aufsummieren und Verdreifachen ergibt sich daraus

$$3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 6 \cdot (||A||^2 + ||B||^2 + ||C||^2 - \langle A, B\rangle - \langle B, C\rangle - \langle A, C\rangle) \quad .$$

Andererseits haben wir

$$0 = \langle A + B + C, A + B + C\rangle = ||A||^2 + ||B||^2 + ||C||^2 + 2(\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle A, C\rangle) \quad ,$$

also $-6 \cdot (\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle A, C\rangle) = 3 \cdot (||A||^2 + ||B||^2 + ||C||^2)$ und daher

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \cdot (||A||^2 + ||B||^2 + ||C||^2) = 4(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$$

wie behauptet.

Ergebnisse der Nachklausur in Geometrie vom 28.9.2017

Punkteverteilung in Klausur und Nachklausur (die jeweils bessere wurde gewertet):

1. Zeile Klausurpunkte,
2. Zeile Notenpunkte,
3. Zeile Note,
4. Anzahl der Studierenden, welche diese Notenpunkte in der Klausur erreicht haben,
5. prozentuale Notenverteilung (gerundet)

0–6	7–13	14–19	20–25	26–31	32–35	36–39	40–43	44–47	48–51	52–55	56–60	61–65	66–70	71–75	76–80
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	5				4		3			2			1		
3	5	7	11	4	27	15	8	8	3	1	2	2	1	2	1
3	27				41,5		19			5			4		

Mat.Nr.	Kl.pkte.	No.pkte.	Note
948476	33	5	4
4183758	5	0	6
4897897	50	9	2,7
4953195	32	5	4
5098774	29	4	5
5327788	36	6	3,7
5333251	36	6	3,7
5341997	63	12	1,7
5362950	10	1	5
5559543	34	5	4
5614200	23	3	5
5718779	40	7	3,3

Mat.Nr.	Kl.pkte.	No.pkte.	Note
5730252	18	2	5
5752887	42	7	3,3
5950401	39	6	3,7
5976702	34	5	4
6047944	32	5	4
6059864	25	3	5
6062835	16	2	5
6087441	26	4	5
6088848	32	5	4
6096034	29	4	5
6101796	5	0	6
6109390	12	1	5
6143383	8	1	5
6257242	14	2	5
6260035	8	1	5
6279259	38	6	3,7
6290131	14	2	5
6292197	22	3	5
6326704	33	5	4
6330541	17	2	5
6344812	41	7	3,3
6356185	40	7	3,3
6365639	37	6	3,7
6390125	33	5	4
6401755	36	6	3,7
6494720	14	2	5
6556082	10	1	5