**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Wintersemester 2017/2018

**Elementarmathematik I**
Prof. Dr. Annette Werner
Rosemarie Martienssen

# Aufgaben zur Vertiefung
## Lösungen - meistens wirklich nur die Ergebnisse!

**Aufgabe 1.**

(i) Falsch

(ii) Falsch

(iii) Richtig

(iv) Richtig

(v) Richtig

(vi) Falsch (1 besitzt ein Inverses)

(vii) Richtig

(viii) Richtig

(ix) Falsch

(x) Richtig

**Aufgabe 2.**
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Leftrightarrow (2x_1 - 4)(x_2 - 1) &= (2x_2 - 4)(x_1 - 1) \\ \Leftrightarrow -2x_1 - 4x_2 &= -2x_2 - 4x_1 \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

und damit ist $f$ injektiv.
Ein $y \in \mathbb{Q}$ liegt genau dann im Bild unter $f$, wenn es ein $x \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ gibt, mit

$$y = \frac{2x-4}{x-1}$$

und dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $x \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ gibt, mit

$$x(y-2) = y-4.$$

Für $y = 2$ ist das nicht möglich und für $y \neq 2$ erfüllt $x = \frac{y-4}{y-2}$ diese Gleichung. Also ist die Abbildung

$$g : \mathbb{Q}\backslash\{1\} \to \mathbb{Q}\backslash\{2\}, \qquad x \mapsto \frac{2x-4}{x-1}$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$g^{-1} : \mathbb{Q}\backslash\{2\} \to \mathbb{Q}\backslash\{1\}, \qquad y \mapsto \frac{y-4}{y-2},$$

wie man leicht nachweist, indem man

$$g(g^{-1}(x)) = \frac{2 \cdot \frac{x-4}{x-2} - 4}{\frac{x-4}{x-2} - 1} = x \text{ und } g^{-1}(g(x)) = \frac{\frac{2x-4}{x-1} - 4}{\frac{2x-4}{x-1} - 2} = x$$

nachrechnet. Dies bedeutet, dass $g \circ g^{-1} = id_{\mathbb{Q}\backslash\{2\}}$ und $g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{Q}\backslash\{1\}}$ gilt und somit $g^{-1}$ tatsächlich die gesuchte Umkehrfunktion ist.

**Aufgabe 3.**
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = 1 = 1^4.$$

Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) &= \sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 \\ &= n^4 + 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6(n^2 + 2n + 1) + 4(n+1) - 1 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &= (n+1)^4\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.**

(i) $255 = [FF]_{16}$, $256 = [100]_{16}$ und $4077 = [FED]_{16}$

(ii) $[1A]_{16} = 26$, $[123]_{16} = 291$ und $[BAD]_{16} = 2989$

(iii) $[1A]_16 + [123]_{16} = [CEA]_{16}$, $[123]_{16} + [BAD]_{16} = [CD0]_{16}$ und $[1A]_{16} + [BAD]_{16} = [BC7]_{16}$

**Aufgabe 5.**
$R_1, R_5$ und $R_7$ definieren Äquivalenzrelationen auf $M$.

**Aufgabe 6.**

(i) Nur 172436 ist ohne Rest durch 11 teilbar (Elferregel)

(ii) $-8$ und 7

**Aufgabe 7.**

(i) Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt:
$\sum_{k=1}^{2}(f_k)^2 = f_1^2 + f_2^2 = 1 + 1 = 2 = 1 \cdot 2 = f_2 \cdot f_3$
Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(f_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(f_k)^2 + (f_{n+1})^2 \\ &= f_n \cdot f_{n+1} + (f_{n+1})^2 \\ &= f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1} \cdot f_{n+2}\end{aligned}$$

da nach Definition der Fibonacci-Folge $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ gilt.

(ii) Im Beweis von Satz 7.5 i) (Existenz des multiplikativen Inversen einer Cauchy-Folge $\neq 0$), denn jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge und die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem Beweis.

(iii) Die Folge konvergiert, da sie aus konvergenten Folgen zusammengesetzt ist (welche genau?) und der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(7 \cdot 0 + 4)(15 - 2 \cdot 0^3 + 0)}{(3 - 5 \cdot 0)(1000000 \cdot 0 + 10)} = 2$$

**Aufgabe 8.**
Es ist

$$0,06\overline{81} = 0 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} \cdot 0,\overline{81} = \frac{3}{44},$$

da $0,\overline{81} = \frac{9}{11}$ gilt.