

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 1

16. Oktober 2018

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Für eine reelle Zahl a betrachten wir das Gleichungssystem

$$x - ay = 0,$$

$$ax - y = 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen (x, y) in Abhängigkeit von a . Wann gibt es neben $(0, 0)$ weitere Lösungen?

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Eine ganze Zahl m ist durch 3 teilbar, wenn $m = 3k$ mit einer ganzen Zahl k gilt. Zeigen Sie durch Induktion, dass $4^n - 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 3. (8 = 2+2+1+1+2 Punkte)

Wir betrachten Folgen, welche die Rekursionsgleichung

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ erfüllen.

- Wenn die ersten beiden Folgenglieder durch $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ gegeben sind, wie lauten die Folgenglieder a_2, \dots, a_5 ?
- Zeigen Sie durch einen Induktionsbeweis, dass die gesamte Folge durch a_0 und a_1 eindeutig festgelegt ist. Das heißt: Sind (a_n) und (b_n) zwei Folgen, welche der Rekursionsgleichung genügen, und gilt $a_0 = b_0$ und $a_1 = b_1$, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \geq 2$.
- Sei x eine von Null verschiedene reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = x^n$ die Rekursionsgleichung genau dann erfüllt, wenn $x = 3$ oder $x = 1$ gilt.
- Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = 3^n a + b$ für beliebige reelle Zahlen a und b die Rekursionsgleichung erfüllt.
- Angenommen, die Folge (a_n) erfüllt die Rekursionsgleichung und es gilt $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Finden Sie a und b , so dass $a_n = 3^n a + b$ für alle $n \geq 0$ gilt. Überprüfen Sie Ihre Lösung anhand der Folgenglieder a_2, \dots, a_5 , die Sie in (a) berechnet haben.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Gegeben seien folgende Mengen:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Bestimmen Sie die Mengen:

- (a) $A \cap B, A \cap C, B \cap C,$
- (b) $A \cup B, A \cup C, B \cup C,$
- (c) $A \setminus B, B \setminus A,$
- (d) $((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C.$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **23. Oktober 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra
