Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Präsenzaufgabenblatt 2 23. Oktober 2018

Aufgabe P1.

Geben Sie Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) nicht injektiv, aber surjektiv;
(b) nicht surjektiv, aber injektiv;
(c) weder injektiv noch surjektiv

Aufgabe P2.

Es bezeichne $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Welche der folgenden Vorschriften definieren eine Abbildung? Welche Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto x + 1$
(b) $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto \frac{x}{2}$
(c) $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y$ mit $y^2 = x$
(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y$ mit $y^2 = x$
(e) $f_5 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y$ mit $y^2 = x$
(f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4$
(g) $f_7 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4$
(h) $f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^4$
(i) $f_9 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^4$

Aufgabe P3.

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Ferner seien $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ und die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht.
(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(e) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.
(f) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$
(g) $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.
(h) $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C)$.

Aufgabe P4.

(a) Schreiben Sie folgende Aussagen in Symbolen. Dabei dürfen Sie die Bezeichnungen $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen verwenden.

   (i) Für alle ganzen Zahlen n gilt: Ist n ungerade, so ist $n^2 + 1$ gerade.

   (ii) Es existiert zu jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl y, so dass $xy = 1$.

   (iii) Es existiert zu jeder reellen Zahl x genau eine ganze Zahl n, so dass $n \leq x < n + 1$.

   (iv) Es existiert eine ganze Zahl y, so dass $x + y = 0$ für alle ganzen Zahlen x gilt.

   Welche der obigen Aussagen sind wahr bzw. falsch? Wie lauten die Negationen der falschen Aussagen?

(b) Es sei M die Menge der lebenden Menschen, die lebende Geschwister haben. Betrachten Sie folgende Aussagen

   - $\forall x \in M \, \exists y \in M : x$ ist Schwester oder Bruder von y.
   - $\exists y \in M \, \forall x \in M : x$ ist Schwester oder Bruder von y.

   Worin besteht der Unterschied zwischen den beiden Aussagen? Welche Aussage ist wahr und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!