Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 4 6. November 2018

Aufgabe 1. (4 = 1+1+1+1 Punkte)

Wir nummerieren die Ecken eines Quadrats im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, 4.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{——} & 2 \\ | & & | \\ 4 & \text{——} & 3 \end{array}$$

Eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn induziert eine Permutation der Ecken und damit ein Element σ der symmetrischen Gruppe S_4. Die Spiegelung an der vertikalen Achse induziert eine weitere Bijektion τ.

(a) Schreiben Sie σ und τ als Wertetabellen auf.

(b) Berechnen Sie $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.

(c) Bestimmen Sie die Inversen σ^{-1} und τ^{-1}.

(d) Zeigen Sie, dass man jede Permutation der Ecken, welche durch eine starre Bewegung des Quadrats entsteht, mittels Komposition aus σ und τ erhalten kann.

Aufgabe 2. (4=1+1+1+1 Punkte)

Bei welchen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen handelt es sich um Unterräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,;\, x + y = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 = y^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,

(d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3. (4=3+1 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : V \to K$ heißt *homogen vom Grad d*, wenn $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt. Wir definieren

$$H_d(V) := \{f : V \to K \,;\, f \text{ ist homogen vom Grad } d\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $H_d(V)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, K)$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle homogenen Funktionen $f : K \to K$ vom Grad d.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (4=2+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir definieren auf V die Relation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in U.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Seien ab jetzt

$$K = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 0 \right\}.$$

(b) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen bezüglich obiger Relation.

(c) Zeigen Sie, dass die Vorschrift $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{R}^2/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert.
Hinweis: Benutzen Sie Blatt 3, Aufgabe 2(c).

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **13. November 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
