Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 5 13. November 2018

Aufgabe 1. (4=2+2 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

(a) Sei $\lambda \in K^\times$, $1 \leq \alpha \leq n$ und sei $(v_1, \dots, \lambda v_\alpha, \dots, v_n)$ das Tupel, in welchem λv_α an der Stelle von v_α steht. Zeigen Sie:

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = \langle v_1, \dots, \lambda v_\alpha, \dots, v_n \rangle_K,$$

und wenn $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig sind, dann auch $(v_1, \dots, \lambda v_\alpha, \dots, v_n)$.

(b) Sei $\mu \in K$ und $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ mit $\alpha \neq \beta$ und sei $(v_1, \dots, v_\alpha + \mu v_\beta, \dots, v_n)$ das Tupel, in welchem $v_\alpha + \mu v_\beta$ an der Stelle von v_α steht. Zeigen Sie:

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_\alpha + \mu v_\beta, \dots, v_n \rangle_K,$$

und wenn $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig sind, dann auch $(v_1, \dots, v_\alpha + \mu v_\beta, \dots, v_n)$.

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte)

Sei K ein Körper, seien $a, b \in K$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \in K^2$. Zeigen Sie:

(a) (v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, wenn $a \neq b$ gilt.

(b) (v_1, v_2) ist genau dann ein Erzeugendensystem von K^2, wenn $a \neq b$ gilt.

Aufgabe 3. (4 = 1+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper und X eine Menge. Für $a \in X$ definieren wir $\mathbf{1}_a \in \mathrm{Abb}(X, K)$ durch

$$\mathbf{1}_a(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } x = a, \\ 0, & \text{falls } x \neq a. \end{cases}$$

Sei $M = (\mathbf{1}_a)_{a \in X}$. Zeigen Sie:

(a) Das Tupel M ist linear unabhängig.

(b) Ist X endlich, so ist M sogar eine Basis von $\mathrm{Abb}(X, K)$.

(c) Ist X unendlich, ist M keine Basis. Welche Abbildungen liegen in der linearen Hülle von M?

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (4=2+2 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Sei $v \in K^2$, $v \neq 0$. Zeigen Sie: $\exists\, a, b \in K$, nicht beide 0, so dass gilt:

$$\langle v \rangle_K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 \; ; \; ax + by = 0 \right\}.$$

(b) Seien $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig } \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **20. November 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
