Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 6 20. November 2018

Aufgabe 1. (4=2+2 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum, der ein unendliches linear unabhängiges Tupel $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ besitzt. Zeigen Sie, dass V nicht endlich erzeugt ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Vektorraum der Folgen $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ Vektoren der Form

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix},$$

d.h. es gelte $v_i = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $j > i$. Zeigen Sie:

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ ist eine Basis von } K^n \iff a_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 3. (4=1+1+2 Punkte)

(a) Sei $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $U := \bigcup_{i \geq 1} U_i$ ein Unterraum von V ist.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ wie oben. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $U_i = U_n$ für alle $i \geq n$ gilt.

(c) Die Länge einer echt aufsteigenden Folge von Unterräumen $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n$ (d.h. $U_i \subseteq U_{i+1}$ und $U_i \neq U_{i+1}$) ist als n definiert. Zeigen Sie: In einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist $\dim(V)$ die maximale Länge einer solchen Folge.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (5 = 2+2+1 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wir können V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen, indem wir die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ einschränken. Zeigen Sie:

(a) Sind $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, dann sind $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(b) Es gilt $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n \rangle_{\mathbb{R}}$.

(c) Folgern Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **27. November 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
