Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 7 27. November 2018

Aufgabe 1. (4=1+1+1+1 Punkte)

(a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$, $\mathbb{R}$-linear?

(b) Ist die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, $\mathbb{C}$-linear?

(c) Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbb{R}$-linear?

(d) Zeigen Sie: Ist K ein Körper, so hat jede K-lineare Abbildung $K \to K$ die Form $x \mapsto \lambda x$ für ein $\lambda \in K$.

Aufgabe 2. (4=1+1+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1, \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -2.$$

(b) Berechnen Sie $f(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix})$. Geben Sie eine Formel für $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ an.

(c) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist. Folgern Sie: $\dim(\ker(f)) = 1$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$.

Aufgabe 3. (3=2+1 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine K-lineare Abbildung $f : V \to K$ mit $f(v) \neq 0$ existiert.

(b) Seien $x, y \in V$. Zeigen Sie: Es gilt $x = y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ für jede K-lineare Abbildung $f : V \to K$ gilt.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 4. (5=2+1+2 Punkte)

Seien V_1 und V_2 zwei K-Vektorräume. Eine *(abstrakte) direkte Summe* (V, ι_1, ι_2) von V_1 und V_2 ist ein K-Vektorraum V zusammen mit zwei linearen Abbildungen $\iota_1 : V_1 \to V$ und $\iota_2 : V_2 \to V$, so dass für jeden weiteren K-Vektorraum T mit linearen Abbildungen $f_1 : V_1 \to T$ und $f_2 : V_2 \to T$ genau eine lineare Abbildung $F : V \to T$ existiert, so dass $f_i = F \circ \iota_i$ für $i = 1, 2$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\
& V \arrow[r, dashed, "\exists!\, F"] & T \\
V_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

(a) Sei $V \coloneqq V_1 \oplus V_2$, d.h. als Menge ist

$$V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \;;\; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

und Addition und Skalarmultiplikation sind durch

$$\begin{aligned}
(v_1, v_2) + (w_1, w_2) &\coloneqq (v_1 + w_1, v_2 + w_2) && \text{für } v_1, w_1 \in V_1,\ v_2, w_2 \in V_2, \\
\lambda(v_1, v_2) &\coloneqq (\lambda v_1, \lambda v_2) && \text{für } \lambda \in K, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2,
\end{aligned}$$

gegeben. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\iota_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2, &\quad \iota_1(v_1) \coloneqq (v_1, 0), \\
\iota_2 : V_2 \to V_1 \oplus V_2, &\quad \iota_2(v_2) \coloneqq (0, v_2).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $(V_1 \oplus V_2, \iota_1, \iota_2)$ ist eine direkte Summe von V_1 und V_2.

(b) Zeigen Sie: Sind (V, ι_1, ι_2) und (V', ι_1', ι_2') zwei direkte Summen von V_1 und V_2. dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $F : V \xrightarrow{\sim} V'$, so dass $\iota_i' = F \circ \iota_i$ für $i = 1, 2$ gilt.

(c) Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie folgende Aussagen: Es gibt genau eine lineare Abbildung $F : U_1 \oplus U_2 \to U_1 + U_2$ mit $F(u_1, 0) = u_1$ und $F(0, u_2) = u_2$ für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Diese ist stets surjektiv. Sie ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Summe $U_1 + U_2$ direkt ist.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **4. Dezember 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
