Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 8 4. Dezember 2018

Aufgabe 1. (4=2+2 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit Darstellungsmatrix $A := \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Projektor ist, wenn $A^2 = A$ gilt.

(b) Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 3x + y + 2z \\ -2x - 2z \\ -2x - y - z \end{pmatrix}.$$

Ist f ein Projektor?

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt symmetrisch, wenn $B^t = B$ gilt. Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ sind A^tA und AA^t symmetrisch. Berechnen Sie A^tA und AA^t für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A^n := AA\cdots A$ (n Faktoren), für $n = 0$ ist $A^0 = \mathbf{1}_2$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, indem Sie die inverse Matrix A^{-1} angeben.

Aufgabe 3. (4=2+2 Punkte)

(a) Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ sei $\mu_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Multiplikation mit z, also $\mu_z(x) = zx$ für $x \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A(z) := \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\mu_z) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ von μ_z bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (1, i)$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Zeigen Sie:
  (i) $A(1) = \mathbf{1}_2$;
  (ii) $\forall z, w \in \mathbb{C} : A(zw) = A(z)A(w)$;
  (iii) für $z \in \mathbb{C}^\times$ gilt $A(z) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$;
  (iv) die Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $z \mapsto A(z)$ ist injektiv.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (4=1+1+1+1 Punkte)

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum der Folgen $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})$ sei U die Teilmenge

$$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})\ ;\ \forall n \geq 2 : x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})$ ist.

(b) Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch folgende Rekursionen definiert:

$$\begin{aligned} a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad & a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2, \\ b_0 = 0, \quad b_1 = 1 \quad \text{und} \quad & b_n = 4b_{n-1} - 3b_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := (a, b)$ eine Basis von U ist.

(c) Es sei

$$\phi_l : U \to U,\ x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto \phi_l(x) := (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass ϕ_l ein (wohldefinierter) Automorphismus auf U ist.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\phi_l)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **11. Dezember 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
