Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 9 11. Dezember 2018

Aufgabe 1. (6=4+1+1 Punkte)

(a) Bringen Sie folgende Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens in Zeilenstufenform.

(i) $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, (ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass A_1 invertierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Spalten von A_2 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden und bestimmen Sie eine Teilmenge, die eine Basis bildet.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ eine Matrix vom Rang $\mathrm{rg}(A) = 1$. Zeigen Sie, dass es $v \in K^n$ und $w \in K^m$ gibt mit

$$A = vw^t.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und stellen Sie die Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 in dieser Basis dar. Geben Sie die inverse Matrix zu $A = [v_1, v_2, v_3] \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Entscheiden Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung in $\mathbb{R}^3$ besitzt, und bestimmen Sie jeweils den Lösungsraum:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &= a, \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 0, \\ X_1 + 4X_2 + 9X_3 &= 2. \end{aligned}$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **18. Dezember 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`