Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 10 18. Dezember 2018

Aufgabe 1. (4=2+2 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & & + & & X_3 & = & 0, \\ X_1 & + & X_2 & & & = & 0, \\ & & X_2 & + & X_3 & = & 0. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{Q}^3$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{F}_2^3$.

Aufgabe 2. (4=1+2+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine Permutation $\sigma \in S_n$, die ein Produkt von r Transpositionen ist, hat das Signum
$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^r.$$

(b) Sei
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$
Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie damit $\operatorname{sign}(\sigma)$.

(c) Geben Sie die Fehlstände von σ an und bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$ noch einmal über die Inversionszahl.

Aufgabe 3. (3=1+1+1 Punkte)

Sei $A_n \subseteq S_n$ die Menge der geraden Permutationen in S_n.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $n \geq 2$ die Abbildung $\sigma \mapsto (1,2)\sigma$ eine Bijektion zwischen A_n und $S_n \setminus A_n$ ist.

(b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der geraden Permutationen in S_n.

(c) Geben Sie alle geraden und ungeraden Permutationen in S_3 an.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (5=1+1+1+1+1 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, aufgefasst als der eindimensionale Vektorraum K^1 über sich selbst. Zeigen Sie, dass die Abbildung $a : K^* \to K$, $f \mapsto f(1)$ ein Isomorphismus ist.

(b) Sei V ein K-Vektorraum. Für $v \in V$ sei $f_v : K \to V$ die lineare Abbildung $f_v(\lambda) = \lambda v$. Berechnen Sie die Komposition

$$V^* \xrightarrow{f_v^*} K^* \xrightarrow{a} K.$$

(c) Für $v \in V$ sei $\varphi(v) : V^* \to K$ definiert durch

$$\varphi(v)(\pi) = \pi(v).$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(v) \in V^{**}$ gilt und dass die Abbildung $\varphi : V \to V^{**}$ linear ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : V \to V^{**}$ injektiv ist. Folgern Sie, dass sie ein Isomorphismus ist, wenn V endlichdimensional ist.

(e) Sei V endlichdimensional mit Basis $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sei $\mathscr{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zu $\mathscr{B}^*$ duale Basis von V^* und $\mathscr{B}^{**} = (v_1^{**}, \ldots, v_n^{**})$ die zu $\mathscr{B}^*$ duale Basis von V^{**}. Zeigen Sie, dass für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\varphi(v_i) = v_i^{**}.$$

Abgabe: Am Dienstag, den **15. Januar 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`