Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 11 15. Januar 2019

Aufgabe 1. (5=1+1+1,5+1,5 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Determinante (vgl. Blatt 5, Aufgabe 4; Blatt 6, Aufgabe 2).

(a) Für $a, b, c, d \in K$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig} \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

(b) Seien $v_1, \dots, v_n \in K^n$ Vektoren der Form

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix},$$

d.h. es gelte $v_i = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $j > i$. Dann gilt:

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ ist eine Basis von } K^n \iff a_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Für welche x ist die Matrix invertierbar?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Für $n \geq 1$ sei

$$A_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass

$$\det(A_n) = -\det(A_{n-2})$$

für alle $n \geq 3$ gilt. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist A_n invertierbar?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **22. Januar 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`