Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 12 22. Januar 2019

Aufgabe 1. (3=1+1+1 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Seien $f, g : V \to V$ zwei Endomorphismen und sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und gleichzeitig ein Eigenvektor von g zum Eigenwert μ. Zeigen Sie: v ist ein Eigenvektor von $g \circ f$ und $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda\mu$.

(b) Sei $f : V \to V$ ein Isomorphismus und $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Zeigen Sie: Es gilt $\lambda \neq 0$ und v ist ein Eigenvektor von f^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(c) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und $w \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ. Angenommen, $v + w$ ist auch ein Eigenvektor von f. Zeigen Sie: $\lambda = \mu$.

Aufgabe 2. (6=2+2+1+1 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(\lambda \mathbf{1} - A)$ in Abhängigkeit von $\lambda \in K$ und zeigen Sie, dass -1 und 3 Eigenwerte von A sind.

(b) Berechnen Sie Basen für die zugehörigen Eigenräume V_{-1} und V_3 von A. Folgern Sie: $\dim(V_{-1}) = 2$ und $\dim(V_3) = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $V_{-1} \oplus V_3 = \mathbb{R}^3$ gilt und dass A keine weiteren Eigenwerte besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, indem Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ angeben, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3. (4=1+3 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei die Abbildung $\Phi : \mathrm{Abb}(K, K) \to \mathrm{Abb}(K, K)$ definiert durch

$$\Phi(f)(x) = xf(x) \quad \text{für } x \in K.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein Endomorphismus auf dem K-Vektorraum V ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von Φ.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in K$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Folgern Sie, dass die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden sind.

Hinweise: Das Produkt läuft über alle Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$. Ein leeres Produkt ohne Faktoren hat per Definition den Wert 1. Zeigen Sie die Formel per Induktion. Benutzen Sie zunächst Spaltenoperationen, um Nullen in der ersten Zeile zu erzeugen, beginnend mit der Subtraktion des a_1-fachen der vorletzten Spalte von der letzten.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **29. Januar 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`
