Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Präsenzaufgabenblatt 12 22. Januar 2019

Aufgabe P1.

Sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\det(\lambda \mathbf{1} - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A ist. Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(c) Finden Sie eine Formel für die Matrixpotenzen A^n für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe P2.

Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\mu_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Multiplikation mit z, also $\mu_z(x) = zx$ für $x \in \mathbb{C}$. Wir betrachten μ_z als Endomorphismus von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von μ_z. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist μ_z diagonalisierbar?