Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 13 29. Januar 2019

Aufgabe 1. (3=1+1+1 Punkte)

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest von

$$P(X) = 5X^5 - 10X^4 - 2X^3 + 9X^2 - 4X + 7 \quad \text{durch} \quad D(X) = 5X^2 + 3.$$

(b) Sei K ein Körper und $f, g \in K[X]$ zwei Polynome vom Grad $\leq n$. Zeigen Sie: Wenn f und g in $n+1$ Punkten übereinstimmen (d.h. es gibt verschiedene Elemente $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$ mit $f(x_i) = g(x_i)$ für $i = 1, \dots, n+1$), dann gilt $f = g$.

(c) Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, so dass $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$. Stellen Sie dieses als Produkt von Linearfaktoren dar. Geben Sie die Nullstellen mit Multiplizitäten an.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen der Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in K$ paarweise verschieden und $b_1, \dots, b_n \in K$ beliebig. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\deg(P) < n$ gibt, so dass gilt:

$$P(x_i) = b_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4 von Blatt 12.

— bitte wenden —

Aufgabe 4. (5=1+1+1+1+1 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie Basen für die Eigenräume von A und geben Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ an, so dass gilt:

$$A = SDS^{-1}.$$

(c) Bestimmen Sie S^{-1} und berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die der Rekursionsgleichung

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

genügt. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(e) Finden Sie eine Formel für a_n in Abhängigkeit von a_0 und a_1.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **5. Februar 2019**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/73427229/19_18_WS_Lineare_Algebra`