Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

# Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

**Übungsblatt 14** 5. Februar 2019

Dieses Übungsblatt ist nicht mehr abzugeben. Es dient der Wiederholung des Vorlesungsstoffs und damit der Klausurvorbereitung.

**Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig sind und ergänzen Sie sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 2.**

Welchen Rang kann eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ haben? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

**Aufgabe 3.**

Sei $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq 3$ über $\mathbb{R}$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} &\to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}, \\ f(X) &\mapsto f(X+1). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi$ ein $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.

(c) Untersuchen Sie $\varphi$ auf Diagonalisierbarkeit.

**Aufgabe 4.**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und das Minimalpolynom $m_A(X)$ von $A$.

**Aufgabe 5.**

Seien $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ Untervektorräume mit $\dim(U) = 2$ und $\dim(W) = 3$. Welche Dimension kann $U \cap W$ haben? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

**Aufgabe 6.**

Sei $K$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Auf $\mathrm{M}_{n\times m}(K)$ betrachten wir die Relation

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \exists S \in \mathrm{GL}_n(K), T \in \mathrm{GL}_m(K) : B = SAT.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Zeigen Sie: $A \sim B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

**Aufgabe 7.**

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Lineare Abbildungen bilden Erzeugendensysteme auf Erzeugendensysteme ab.

(b) Lineare Abbildungen bilden linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängige Vektoren ab.

(c) Ist $f : V \to W$ linear und $(v_i)_{i\in I}$ in $V$, so dass $(f(v_i))_{i\in I}$ linear unabhängig ist, dann ist auch $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

(d) Für jeden Endomorphismus $f$ eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums $V$ gibt es Basen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ von $V$, so dass $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

(e) Für jeden Endomorphismus $f$ eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums $V$ gibt es eine Basis $\mathscr{B}$ von $V$, so dass $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 8.**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -7 & 7 \\ 6 & 7 & -12 & 13 \\ 3 & 4 & -7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

**Aufgabe 9.**

Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 9 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$.

**Aufgabe 10.**

Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_5 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Bestimmen Sie die Dimension von $U := \langle v_1, \dots, v_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ und wählen Sie aus den Vektoren $(v_1, \dots, v_5)$ eine Basis von $U$ aus.

**Aufgabe 11.**

Sei $AX = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: Wenn es eine Lösung in $\mathbb{C}^n$ gibt, dann gibt es auch eine Lösung in $\mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 12.**

Sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\ker(f) = \mathrm{im}(f)$ gilt. Zeigen Sie, dass $\dim(V) = n$ gerade ist und dass eine Basis $\mathscr{B}$ von $V$ existiert, bezüglich derer die Darstellungsmatrix von $f$ die folgende Gestalt hat:

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 13.**

Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

bilden eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie die Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ in dieser Basis dar. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} x.$$

**Aufgabe 14.**

Sei $K$ ein Körper und $a, c, d \in K$. Zeigen Sie: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$$

ist genau dann nicht diagonalisierbar, wenn $a = d$ und $c \neq 0$ gilt.

**Aufgabe 15.**

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $K$-Vektorräumen.

(a) Zeigen Sie: Für $M \subseteq V$ gilt $\langle f(M) \rangle_K = f(\langle M \rangle_K)$.

(b) Zeigen Sie: Für $N \subseteq W$ gilt $\langle f^{-1}(N) \rangle_K \subseteq f^{-1}(\langle N \rangle_K)$, aber im Allgemeinen gilt keine Gleichheit.

**Aufgabe 16.**

Sei $K$ ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^k = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ äquivalent sind:

(i) $A$ ist nilpotent.

(ii) $A$ hat keinen Eigenwert ungleich 0.

(iii) $A^n = 0$.

*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.*

(b) Finden Sie eine Matrix in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, die zwar keinen Eigenwert ungleich 0 hat, aber nicht nilpotent ist.

**Aufgabe 17.**

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von $f$ ist.

**Aufgabe 18.**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $A^t = -A$ gilt. Zeigen Sie, dass $n$ gerade ist.

**Aufgabe 19.**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 3$ gilt:

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

(b) Berechnen Sie $\det(A_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(c) Raten Sie eine Formel für $\det(A_n)$ und beweisen Sie diese durch Induktion.

**Aufgabe 20.**

Stellen Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$$

als Produkt von Transpositionen dar und bestimmen Sie ihr Signum.

**Aufgabe 21.**

Schreiben Sie das Polynom $P(X) = X^3 + 1$ in der Form

$$P(X) = (X - \alpha_1)^{e_1} \cdots (X - \alpha_r)^{e_r} Q(X)$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, Exponenten $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und einem Polynom $Q \in K[X]$ ohne Nullstellen in $K$, für

(a) $K = \mathbb{R}$,

(b) $K = \mathbb{C}$,

(c) $K = \mathbb{F}_2$,

(d) $K = \mathbb{F}_3$,

(e) $K = \mathbb{F}_7$.

**Aufgabe 22.**

Zeigen Sie, dass es kein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ gibt, so dass gilt:

$$P(n) = 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $P(X+1) - 2P(X)$.*

**Aufgabe 23.**

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$$

mit Hilfe der Adjunkten.