Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
5. April 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine Folge $F = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) F ist nicht konstant und konvergiert gegen den Grenzwert 4.

(b) F divergiert und enthält unendlich viele positive und negative a_n.

(c) F konvergiert gegen 0, es sind aber nicht alle a_n nicht-negativ.

(d) F ist monoton wachsend und konvergiert gegen -2. Zur Erinnerung: eine Folge heißt monoton wachsend wenn für alle n gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Folgen auf (uneigentliche) Konvergenz! Falls die Folge konvergiert, dann bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

(b) $(3^k)_{k\geq 10}$

(c) $((-1)^s)_{s\in\mathbb{N}_0}$

(d) $((-1)^j\frac{1}{j})_{j\geq 1}$

Hinweis: die Bernoullische Ungleichung könnte hilfreich sein:

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie nachfolgende Reihen auf Konvergenz! Sie dürfen, müssen aber keine Grenzwerte angeben.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(c) $\sum_{i=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{l=0}^{N} x^l = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

(b) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} x^l$? Was ist der Grenzwert?

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben seien zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir konstruieren eine neue Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_m = \begin{cases} a_n & \text{falls } m = 2n \\ b_n & \text{falls } m = 2n+1. \end{cases}$$

Beweisen Sie: $(c_m)_m$ konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$ wenn $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beide gegen x konvergieren.