Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
23. April 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen? Bestimmen Sie auch den Grenzwert in Abhängigkeit von a.

(a) $\sum\limits_{k=-100}^{\infty} \left(\frac{a}{5}\right)^k$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a^3 + 21a^2 + 147a + 343)^k$

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} + 4)^k$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist} \\ 1 - 1/n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Erinnerung: eine natürliche Zahl $n > 1$ heißt *prim*, falls in jeder Darstellung als Produkt $n = ab$ mit positiven natürlichen Zahlen a und b entweder $a = 1$ oder $b = 1$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir definieren $x_0 = 3/2$ und für $n \geq 0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Zeigen Sie:

(a) x_{n+1} ist wohl-definiert.

(b) Für alle n gilt die Ungleichung $x_n^2 \geq 2$.

(c) Die Folge der x_n fällt monoton und konvergiert somit.

(d) Der Grenzwert x der Folge erfüllt die Gleichung $x^2 = 2$.

Bonusaufgabe (2 Bonuspunkte): Wir nennen den Grenzwert x die *Wurzel aus 2* und schreiben $\sqrt{2} = x$. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Fibonacci-Folge ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1 \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle } n \geq 1. \end{aligned}$$

Schreiben Sie alle Folgenglieder von $(f_n)_n$ bis $n = 10$ aus! Dann beweisen Sie:

(a) Die Folge $(f_n)_n$ divergiert bestimmt gegen ∞.

(b) Für alle $n \geq 1$ gilt $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$.

(c) Die Folge konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}f_{n-1}}{f_n^2} = 1$.

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Freitag, den 26.04.2019**.