

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ für die folgenden Abbildungsvorschriften $f(x)$. Entscheiden Sie dann, für welche $x \in D$ die Funktion f stetig ist. Beweisen Sie ihre Aussagen!

- (a) $x \mapsto |x|$
- (b) $x \mapsto \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$
- (c) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, wobei wir $\lfloor x \rfloor$ als die größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$ definieren.
- (d) $x \mapsto \frac{x^2-1}{|x|-1}$.

Falls $D \neq \mathbb{R}$, entscheiden Sie zudem, ob die Funktion f stetig auf einen größeren Definitionsbereich fortsetzbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Funktion $\text{zack}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\text{zack}(x) = \left| \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - x \right|.$$

- (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion zack .
- (b) Zeigen Sie, dass für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Gleichung $\text{zack}(x) = |x|$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\text{zack}(x) = \text{zack}(x+n)$ gilt.
- (d) Ist die Funktion zack stetig? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass jede beliebige Funktion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- (b) Wir definieren die sogenannte *Indikatorfunktion* von \mathbb{Q} in \mathbb{R} :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Betrachte nun die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

Für welche Werte von x ist f stetig? Für welche nicht? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das bekannte Märchen vom Hasen und vom Igel erzählt die Geschichte eines Hasen und eines Igel, die sich zu einem Wettrennen treffen. Sie starten gemeinsam an der Startlinie, wobei der Hase den langsameren Igel schnell hinter sich lässt. Aber der Igel hat eine List vorbereitet: seine Frau wartet bereits an der Ziellinie, sodass der Hase als er im Ziel ankommt, glaubt verloren zu haben.

Im Märchen versteht der Hase nicht, wie es zu seiner scheinbaren Niederlage kommen konnte. Nehmen Sie die Rolle des Hasen ein und begründen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung behandelten Sätze zur Stetigkeit, dass der Igel betrogen haben muss.

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Montag, den 13.05.2019**.