Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
10. Mai 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Summe

$$\begin{aligned} f+g\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

und das Produkt

$$\begin{aligned} f\cdot g\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \end{aligned}$$

sind ebenso stetige Funktionen.

(b) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist der Quotient

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *linksstetig in einem Punkt* $x \in D$, falls für jede Folge reeller Zahlen $(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n^- = x$ und $x_n^- < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n^-) = f(x)$. Analog heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *rechtsstetig in einem Punkt* $x \in D$, falls für jede Folge reeller Zahlen $(x_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n^+ = x$ und $x_n^+ > x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n^+) = f(x)$. Wir schreiben in diesen Fällen

$$\lim_{\widetilde{x}\to x^-} f(\widetilde{x}) = f(x)$$

oder entsprechend

$$\lim_{\widetilde{x}\to x^+} f(\widetilde{x}) = f(x) \ .$$

(a) Zeigen, sie dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ genau dann in einem Punkt $x \in D$ stetig ist, wenn sie links- und rechtsstetig ist.

(b) Sei $D = [a, x) \cup (x, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < x < b$. Betrachten Sie eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\widetilde{x} \to x^-} f(\widetilde{x}) = \lim_{\widetilde{x} \to x^+} f(\widetilde{x}) \ .$$

Zeigen Sie, dass f stetig auf das Intervall $\widetilde{D} = [a, b]$ fortsetzbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $N \in \mathbb{N}$ und definiere die Funktionen

$$\begin{aligned} f_N &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < -1/N, \\ Nx & \text{falls } -1/N \leq x \leq 1/N, \\ 1 & \text{falls } x > 1/N. \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die Funktionen f_N mit $N = \{1, 2, 3, 4\}$ im Bereich $x \in [-3/2, 3/2]$!

(b) Begründen Sie, dass f_N für alle $N \in \mathbb{N}$ stetig ist.

(c) Wir definieren eine Grenzfunktion, indem wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Folge $(f_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ betrachten:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{N \to \infty} f_N(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f wohl-definiert ist, d.h. dass für jedes x der Limes tatsächlich existiert.

(d) Fügen Sie f in Ihre Zeichnung aus Aufgabenteil (a) ein. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} l &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b. \end{aligned}$$

Für welche Werte von a und b existiert die Umkehrabbildung l^{-1}? Bestimmen Sie diese im Falle der Existenz.

(b) Nun seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und die quadratische Abbildung

$$\begin{aligned} q &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

gegeben. Beweisen Sie die quadratische Ergänzung! D.h. zeigen Sie, dass es für jede Wahl von a, b und c geeignete $r, s, t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt

$$ax^2 + bx + c = r(x - s)^2 + t.$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis, um in Abhängigkeit von a, b und c zu bestimmen, für welche maximalen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ die Einschränkung von q auf I injektiv ist. Geben Sie außerdem die Umkehrfunktion q^{-1} auf diesen Intervallen an.

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Freitag, den 17.05.2019**.