Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
22. Mai 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ injektiv ist genau dann wenn es für jedes $y \in \mathrm{Bild}(f)$ genau ein $x \in D$ gibt, so dass $f(x) = y$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ auf denen die folgenden Funktionen (streng) monoton wachsend/ fallend sind.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 12x - 7$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -3x^2 + 12x - 7$

Hinweis: Die Quadratische Ergänzung (Blatt 5, Aufgabe 4) vereinfacht die Argumentation enorm!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* falls es eine Konstante C gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in D$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, die Lipschitz-stetig ist, bereits stetig in allen Punkten $x \in D$ ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine Lipschitz-stetige Funktion. Begründen Sie ihre Wahl.

(c) Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, die in allen Punkten $x \in D$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. Begründen Sie ihre Wahl.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $p = \frac{s}{t}$ und $q = \frac{m}{n}$ zwei rationale Zahlen mit $s, m \in \mathbb{Z}$ und $t, n \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$

(b) $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$

(c) $a^p b^p = (ab)^p$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ mithilfe des Zwischenwertsatzes.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $a > 0$. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \ .$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \ .$$

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Freitag, den 24.05.2019**.