Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
17. Juni 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(Tangenssatz) Gegeben sei ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ. Zeigen Sie, dass, falls das Dreieck nicht gleichschenklig ist (d.h. $a \neq b$), die folgende Formel gilt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \ .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(Mollweidesche Formeln) Gegeben sei ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln gelten:

$$(a+b)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = c\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

sowie

$$(a-b)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = c\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \ .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(Satz von Heron) Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c. Wir definieren s als den halben Umfang des Dreiecks, d.h. wir setzen $s = \frac{a+b+c}{2}$. Zeigen das für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(Formeln von Bretschneider und Brahmagupta) Gegeben sei ein Viereck mit Eckpunkten A, B, C, D mit anliegenden Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und Seitenlängen a, b, c, d. Sei $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ der halbe Umfang des Vierecks. Sei A der Flächeninhalt des Vierecks.

(a) Zeigen Sie die Formel von Bretschneider:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd \cdot \big(1+\cos(\alpha+\gamma)\big)} \ .$$

(b) Wir nehmen nun an, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist, d.h. dass A, B, C, D auf einem Kreis liegen. Leiten Sie aus Bretschneider's Formel die folgende Formel von Brahmagupta ab:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Freitag, den 21.06.2019**.