Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
27. Juni 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom P mit reellen Koeffizienten. Betrachten Sie die komplexe Polynomfunktion

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto P(z).$$

Beweisen Sie, dass $z \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von p ist, wenn $p(\overline{z}) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des folgenden Polynoms und visualisieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene!

$$P = z^8 + 3z^6 - 2z^5 + \left(12 - \frac{1}{16}\right) z^4 - \frac{3}{16} z^2 + \frac{2}{16} z - \frac{12}{16}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie den Fehler in folgender Rechnung:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung:

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge genau dann wenn $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Cauchy-Folgen sind.

(b) Es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} = a \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die komplexen Zahlen konstruiert, indem wir auf Paaren von reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation definiert haben. Analog dazu definieren wir nun die *Quaternionen*: Ein Quaternion ist ein Tupel aus vier reellen Zahlen

$$(a, b, c, d)$$

und wir definieren eine Addition von Quaternionen durch

$$(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=(a+a',b+b',c+c',d+d'),$$

sowie eine Multiplikation gemäß

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)(a',b',c',d')=(&aa'-bb'-cc'-dd',\\ &ab'+ba'+cd'-dc',\\ &ac'-bd'+ca'+db',\\ &ad'+bc'-cb'+da').\end{aligned}$$

Analog zu den komplexen Zahlen definieren wir folgende Notation:

$$\begin{aligned}i&=(0,1,0,0)\\ j&=(0,0,1,0)\\ k&=(0,0,0,1)\\ a+ib+jc+kd&=(a,b,c,d).\end{aligned}$$

(a) Begründen Sie Existenz und Eindeutigkeit eines neutralen Elements der Addition. Machen Sie sich außerdem klar, dass die Addition von Quaternionen assoziativ und kommutativ ist.

(b) Füllen Sie die nachfolgende Multiplikationstabelle aus! Ist die Multiplikation von Quaternionen kommutativ? Bilden die Quaternionen mit der oben definierten Addition und Multiplikation einen Körper?

$\cdot$	1	i	j	k
1				
i				
j				
k				

(c) Beweisen Sie, dass es ein eindeutiges neutrales Element der Multiplikation gibt.

(d) Sei $a+ib+jc+kd$ nicht gleich dem additiv Inversen aus Aufgabenteil (a). Finden Sie das multiplikativ Inverse $(a+ib+jc+kd)^{-1}$!

Abgabe: In den Fächern der Tutor*innen bis **13:00** Uhr am **Freitag, den 05.07.2019**.