Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
11. Juli 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Klausurübungsblatt 1

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Behauptung kurz.

(a) Jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die die Folge $(e^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert selbst.

(b) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |z|$.

(c) Für jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die bestimmt gegen unendlich divergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$.

(d) Sei $r \in [0,1)$ in Dezimaldarstellung gegeben als $\langle 0, r_1 r_2 \ldots\rangle_{10}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n/n$ konvergiert.

(e) Die Menge $M = \{D \subseteq \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion

$$F : (-\infty, 10] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{e}\exp(x+3) & x < -2 \\ 3x+9 & x \in [-2,0] \\ \sin(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 9 & x > 0. \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für welche x ist F differenzierbar in x? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Für welche maximalen $D \subseteq (-\infty, 10]$ ist die Einschränkung von F auf D monoton? Ist F auf $[\pi/2, (3\pi)/2]$ injektiv?

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von F und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

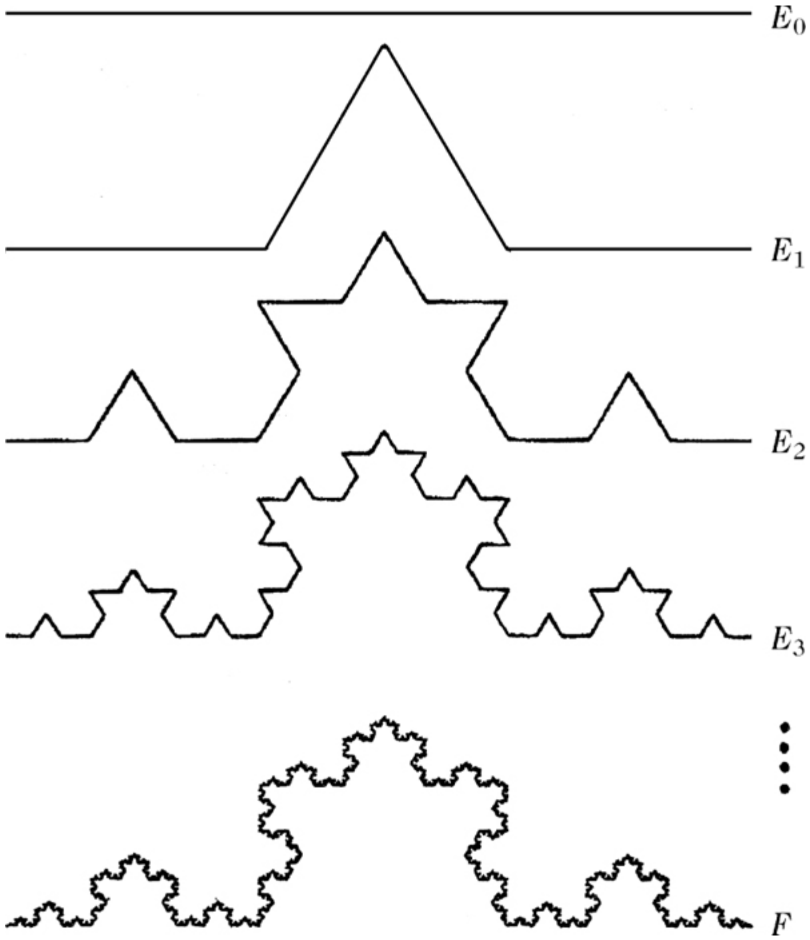
Aufgabe 3

Welche der folgenden Folgen konvergiert? Geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an und beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

(a) $\left(\frac{2n+1}{1-ni}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{n} + i\cos(n\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) Betrachte folgende geometrische Konstruktion einer stückweise geraden Linie E_n. Im Schritt 0 haben wir das Intervall $E_0 = [0, 1]$. Im Schritt 1 platziere auf dem mittleren Drittel $[1/3, 2/3]$ des Intervalls ein gleichseitiges Dreieck und entferne dann die Grundseite. Diese Konstruktion setzen wir iterativ fort: im n-ten Schritt platzieren wir auf dem mittleren Drittel eines jeden Geradensegments ein gleichseitiges Dreieck und entfernen dann die Grundseite.



Quelle: https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/koch-kurve/5284

Untersuchen Sie die Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei l_n die Länge der Linie im n-ten Schritt beschreibt.

Aufgabe 4

Finden Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $f(z) = z^8 - 81i$

(b) $g(z) = z^2 - 3z + 3 + i$

(c) $h(z) = \frac{1}{2}z^2 - z + 1$

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *selbstähnlich*, falls für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right).$$

Beweisen Sie, dass jede stetige selbstähnliche Funktion konstant ist.

(b) Gegeben seien differenzierbare Funktionen $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Beweisen Sie, dass $g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$ differenzierbar ist.

(c) Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass h differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 6

Beweisen Sie die Additionstheoreme für die Sekans- und Kosekansfunktionen:

$$\sec(x+y) = \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\csc x \csc y - \sec x \sec y} \quad \text{und}$$
$$\csc(x+y) = \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\sec x \csc y + \csc x \sec y}.$$