Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
19. Juli 2019

Elementarmathematik 2
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Klausurübungsblatt 1

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Behauptung kurz.

(a) Jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die die Folge $(e^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert selbst.

(b) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |z|$.

(c) Für jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die bestimmt gegen unendlich divergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$.

(d) Sei $r \in [0,1)$ in Dezimaldarstellung gegeben als $\langle 0, r_1 r_2 \ldots \rangle_{10}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n/n$ konvergiert.

(e) Die Menge $M = \{D \subseteq \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

Lösungsvorschlag

(a) Falsch, betrachte die divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = -n$. Dann ist $e^{a_n} = e^{-n}$, was für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

(b) Wahr. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$. Beachte nun, dass $|z| \in \mathbb{R}$.

(c) Falsch. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞, aber $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist die Harmonische Reihe, die nach Vorlesung divergiert.

(d) Falsch. Betrachte $r = \langle 0, 1111\ldots \rangle_{10}$ und verwende das gleiche Argument wie in (c).

(e) Falsch. Angenommen, es gäbe eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Konstruiere die Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ durch die Regel
$$n \in S \text{ genau dann wenn } n \notin \varphi(n).$$
Dann ist $S \in M$ aber $S \neq \varphi(n)$ für alle n. Widerspruch.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} F : (-\infty, 10] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{3}{e}\exp(x+3) & x < -2 \\ 3x+9 & x \in [-2,0] \\ \sin(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 9 & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Ist die Funktion stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für welche x ist F differenzierbar in x? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Für welche maximalen $D \subseteq (-\infty, 10]$ ist die Einschränkung von F auf D monoton? Ist F auf $[\pi/2, (3\pi)/2]$ injektiv?

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von F und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Lösungsvorschlag

Stelle fest: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$, d.h. für $x > 0$ ist $F(x) = \sin^2(x) + 9$.

(a) Ja. Für $x \neq -2$ bzw. 0 ist das klar (Summe, Produkt, Verkettung stetiger Funktionen ist stetig). Betrachte die rechts bzw. linksseitigen Grenzwerte von F in -2 und 0 und zeige, dass diese übereinstimmen. Notation:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{3}{e}\exp(x+3) \\ f_2(x) &= 3x + 9 \\ f_3(x) &= \sin(x)\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 9 = \sin^2(x) + 9 \end{aligned}$$

Damit werden rechts- bzw. linksseitige Grenzwerte von F einfach zu Grenzwerten von dem entsprechenden f_i und das wiederum zu Einsetzungen, denn die f_i sind stetig.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (-2)^-} F(x) &= \lim_{x \to -2} f_1(x) = f_1(-2) = 3 \\ \lim_{x \to (-2)^+} F(x) &= \lim_{x \to -2} f_2(x) = f_2(-2) = 3 \\ \lim_{x \to 0^-} F(x) &= f_2(0) = 3 \cdot 0 + 9 = 9 \\ \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \underbrace{\sin^2(0)}_{=0} + 9 \end{aligned}$$

Also ist F überall stetig.

(b) Für $x \notin \{-2, 0\}$ ist F differenzierbar, weil aus differenzierbaren Funktionen "zusammen gebaut". Für $x = -2$ bzw. 0 überprüft man, ob der Differenzenquotient für $h \searrow 0$ und $h \nearrow 0$ den gleichen Wert hat. Mit den Überlegungen aus (a) bedeutet das aber nichts anders als zu zeigen, dass

$$f_1'(-2) = f_2'(-2) \text{ und } f_2'(0) = f_3'(0).$$

Ableiten:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{3}{e}\exp(x+3) \\ f_2'(x) &= 3 \\ f_3'(x) &= 2\sin(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert, dass F in $x = -2$ differenzierbar ist, aber in $x = 0$ nicht.

(c) e-Funktion und f_2 wachsen beide streng monoton. $\sin^2$ Hat seine lokalen Extrema bei $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen, Minima) und $x = \pi n + \pi/2$ (Maxima). Also ist F auf

$$\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right], \left[\pi, \pi + \frac{\pi}{2}\right], \left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right] [3\pi, 10] \text{ monoton wachsend und auf}$$
$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi\right], \left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 3\pi\right] \text{ monoton fallend.}$$

Weiterhin ist F auf $[\pi/2, 3\pi/2]$ nicht injektiv, denn $F(\pi/2) = F(3\pi/2) = 10$.

(d) Aus der Monotonie auf $(-\infty, \pi/2)$ sieht man schon, dass F in diesem Bereich kein lokales Extremum haben kann. Die einzigen Extrema im Inneren des Definitionsbereichs sind also die, die in (c) bereits genannt wurden:

$$\pi, 2\pi, 3\pi \text{ lokale Minima und}$$
$$\frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ lokale Maxima.}$$

Zusätzlich findet man noch am Rand aufgrund der Monotonie ein Maximum bei $x = 10$.

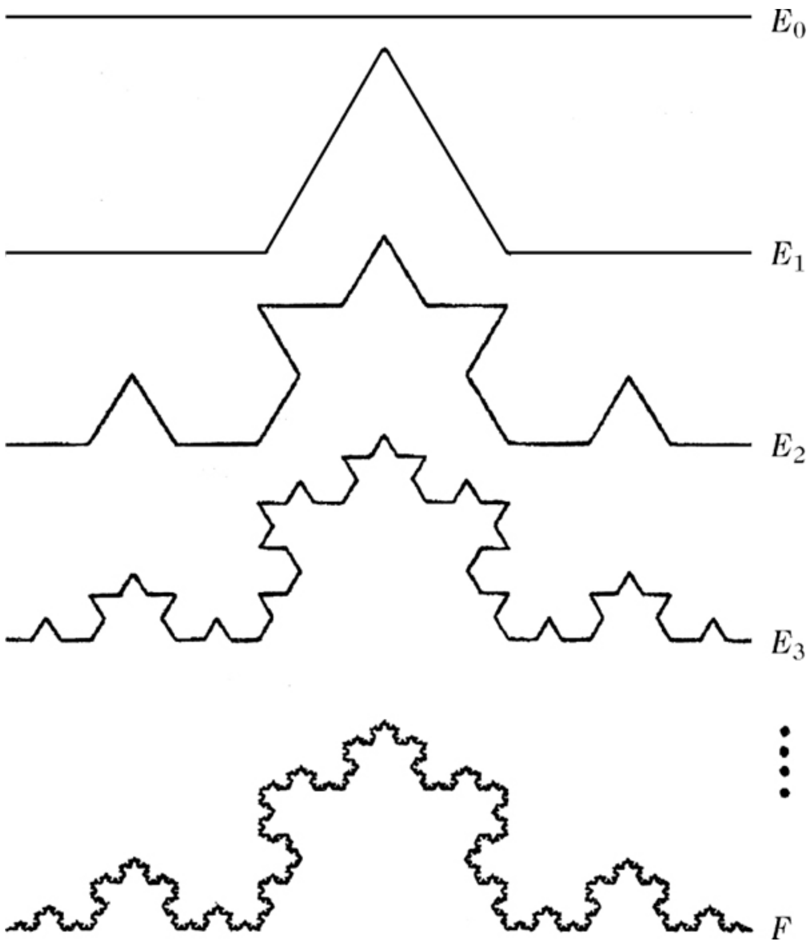
Aufgabe 3

Welche der folgenden Folgen konvergiert? Geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an und beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

(a) $\left(\frac{2n+1}{1-ni}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{n} + i\cos(n\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) Betrachte folgende geometrische Konstruktion einer stückweise geraden Linie E_n. Im Schritt 0 haben wir das Intervall $E_0 = [0, 1]$. Im Schritt 1 platziere auf dem mittleren Drittel $[1/3, 2/3]$ des Intervalls ein gleichseitiges Dreieck und entferne dann die Grundseite. Diese Konstruktion setzen wir iterativ fort: im n-ten Schritt platzieren wir auf dem mittleren Drittel eines jeden Geradensegments ein gleichseitiges Dreieck und entfernen dann die Grundseite.



Quelle: https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/koch-kurve/5284

Untersuchen Sie die Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei l_n die Länge der Linie im n-ten Schritt beschreibt.

Lösungsvorschlag

(a) Konvergiert gegen $-\frac{2}{i}$:

$$\frac{2n+1}{1-ni} = \frac{2+\frac{1}{n}}{-i+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{-i}.$$

(b) Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteilfolge konvergieren. Der Imaginärteil ist hier aber die Folge $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ und somit divergent. Also divergiert die ganze Folge.

(c) Zu Beginn ist $l_0 = 1$. In jedem Schritt erhöht sich die Länge um $4/3$: das mittlere Drittel jeder Strecke wird durch zwei Strecken der gleichen Länge ersetzt. Die Folge ist also eine geometrische Folge: $l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Diese divergiert.

Aufgabe 4

Finden Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $f(z) = z^8 - 81i$

(b) $g(z) = z^2 - 3z + 3 + i$

(c) $h(z) = \frac{1}{2}z^2 - z + 1$

Lösungsvorschlag

(a) Gesucht sind die 8-ten Wurzeln von $81i = \sqrt{3}^8 i$, also sind die Nullstellen von f gerade $z = \sqrt{3}\zeta_j r$, wobei ζ_j die 8-ten Einheitswurzeln sind und r eine 8-te Wurzel aus i ist, z.B. $r = \exp(i\pi/16)$. Alternativ kann man auch gleich alles mit der e-Funktion angeben:

$$\left\{ \sqrt{3}\exp\left(i\pi\frac{4j+1}{16}\right) \,\middle|\, j = 0, \ldots, 7 \right\}.$$

(b) Z.B. kann man die abc-Formel verwenden:

$$z_{1/2} = \frac{1}{2}[3 \pm \sqrt{9 - 4(3+i)}] = \frac{1}{2}[3 \pm (1 - 2i)] = 1 + i \text{ und } 2 - i.$$

(c) Wieder verwenden wir die abc-Formel:

$$z_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *selbstähnlich*, falls für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right).$$

Beweisen Sie, dass jede stetige selbstähnliche Funktion konstant ist.

(b) Gegeben seien differenzierbare Funktionen $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Beweisen Sie, dass $g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$ differenzierbar ist.

(c) Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass h differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag

(a) Sei f selbstähnlich und stetig. Angenommen, f wäre nicht konstant. Das heißt, es gibt $a, b \in [0,1]$ mit $f(a) \neq f(b)$. Setze $\varepsilon = |f(a) - f(b)| > 0$ und betrachte $\delta > 0$. Wir konstruieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = a \qquad\qquad b_1 = b$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} \qquad\qquad b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$$

Wegen der Selbstähnlichkeit von f gilt für alle n, dass $f(a_n) = f(a) \neq f(b) = f(b_n)$. Aber $|a_n - b_n| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. für hinreichend großes n ist $|a_n - b_n| < \delta$. Widerspruch.

(b) Induktion nach n: $n = 1$: es ist nichts zu zeigen. $n \to n+1$: Nach Annahme sind $g_1 \circ \cdots \circ g_n$ und g_{n+1} differenzierbar. Die Kettenregel sagt jetzt, dass auch die Verknüpfung, also

$$g_1 \circ \cdots \circ g_n \circ g_{n+1}$$

differenzierbar ist.

(c) Außerhalb von $x = 0$ ist h als Verkettung und Produkt stetig differenzierbarer Funktionen selbst auch stetig differenzierbar. Wir untersuchen h in $x = 0$ auf Differenzierbarkeit:

$$\frac{1}{\varepsilon}[h(0+\varepsilon) - h(0)] = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Nun ist $\sin(1/\varepsilon)$ beschränkt für $\varepsilon \to 0$, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotient und hat Wert 0.

Außerhalb von $x = 0$ berechnet man die Ableitung von h mit der Produktregel und erhält insgesamt

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man muss nur noch zeigen, dass $\cos(1/x) \not\to 0$ für $x \to 0$. Substituiert man $y = 1/x$, dann ist das äquivalent zu $\cos(y) \not\to 0$ für $y \to \infty$. Letzteres ist aber klar, da es für jedes y immer ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2n\pi > y$ gibt, für das dann gilt $\cos(2n\pi) = 1$. Also ist die Ableitung h' in 0 nicht stetig.

Aufgabe 6

Beweisen Sie die Additionstheoreme für die Sekans- und Kosekansfunktionen:

$$\sec(x+y) = \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\csc x \csc y - \sec x \sec y} \text{ und}$$
$$\csc(x+y) = \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\sec x \csc y + \csc x \sec y}.$$

Lösungsvorschlag

Man führt die Rechnung auf die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus zurück.

$$\begin{aligned} \csc(x+y) = \frac{1}{\sin(x+y)} &= \frac{1}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\csc x}\frac{1}{\sec y} + \frac{1}{\sec x}\frac{1}{\csc y}} \\ &= \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\sec x \csc y + \csc x \sec y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sec(x+y) = \frac{1}{\cos(x+y)} &= \frac{1}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sec x}\frac{1}{\sec y} - \frac{1}{\csc x}\frac{1}{csc y}} \\ &= \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\csc x \csc y - \sec x \sec y} \end{aligned}$$