Elementarmathematik I

Eine Sammlung von Klausuraufgaben

1. Es sei $\Phi: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2_G \times \mathbb{E}^2_A$ die Abbildung, die jedem Raumpunkt $P \in \mathbb{E}^3$ das Paar (P', P'') – Grundriss/Aufriss-Zuordnet, d.h. $\Phi(P) = (P', P'')$.

   Ist Φ injektiv und/oder surjektiv?

2. a) $(0,\overline{101})_2 = ?$ (als gemeiner Bruch)

   b) $(0,1\overline{9})_{10} = (?)_2$

3. a) In $\mathbb{Z}_{28}$ finde man die multiplikativen Inversen $[7]^{-1}$ und $[13]^{-1}$ – soweit sie existieren.

   b) Angenommen $[m] \in \mathbb{Z}_n$ ist in $\mathbb{Z}_n$ multiplikativ invertierbar. Ist dann $[n] \in \mathbb{Z}_m$ in $\mathbb{Z}_m$ auch multiplikativ invertierbar?

4. a) Zeige: Zahlen $n \in \mathbb{N}$, die genau 10 Teiler haben, sind keine Quadratzahlen

   b) Finde alle 2-stelligen Zahlen, die genau 10 Teiler haben

5. Man finde $d(X) = ggT(X^3 - X - 2,\ X^2 - 2X - 1) \in \mathbb{Q}[X]$ und Polynome $f(X)$, $g(X)$ mit $(X^3 - X - 2)f(X) + (X^2 - 2X - 1)g(X) = d(X)$.

6. Beweise mit vollständiger Induktion nach n

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

b) $7^{2n} - 2^{n}$ ist durch 47 teilbar.

7. Die Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch
$f(z) = z^2 + z$

a) Bestimme $f(z)$ für $z = 1, i, -1, -i$

b) Skizziere das Bild des Einheitskreisses unter der Abbildung f.

8. Bestimme die Lösungsmengen $L \subseteq \mathbb{Z}^2$ der Gleichungen

a) $12x - 15y = 9$

b) $13x + 16y = 10$