

# Straßen pflastern mal anders

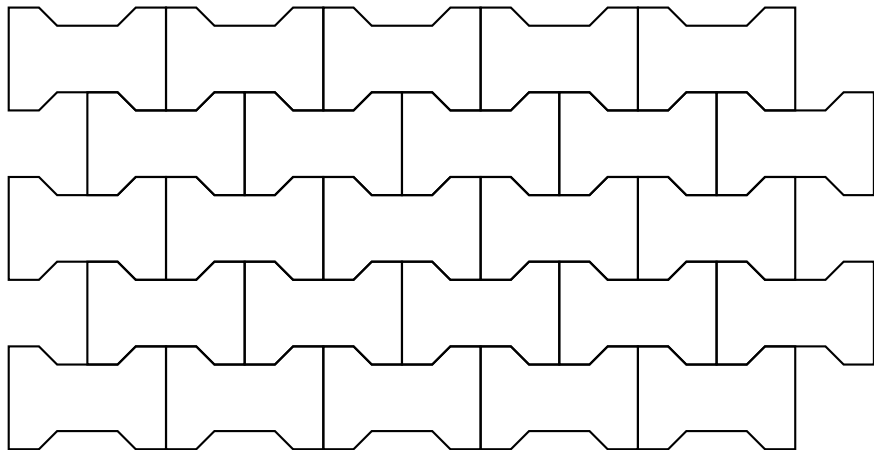
Wenn Straßenbauer Mathematiker konsultieren

Mathias Häbich

Night of Science 2010

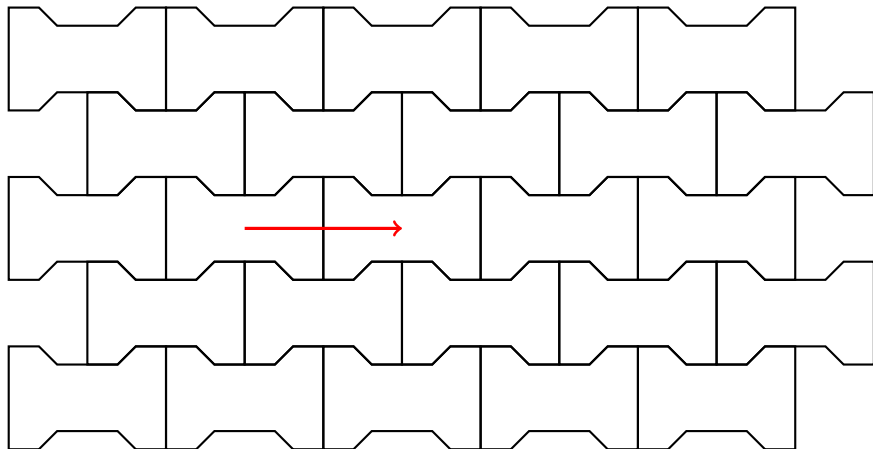
# Symmetrie von Straßenpflastern

Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist periodisch und in unterschiedlichem Maße symmetrisch.



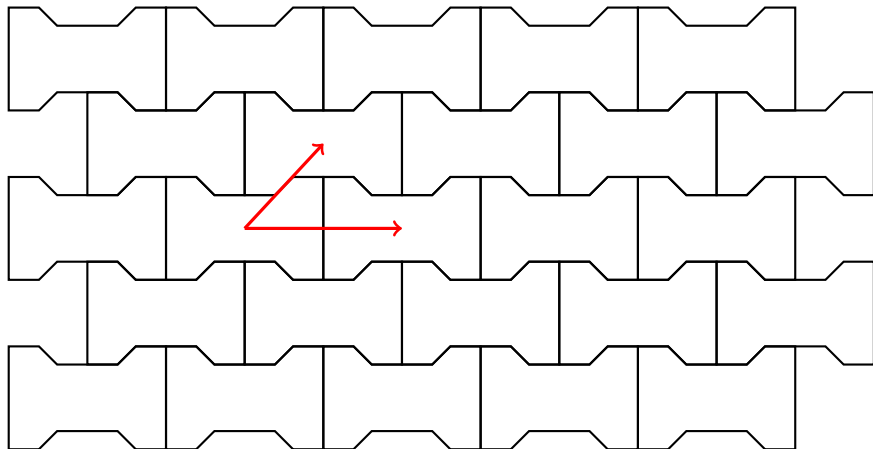
# Symmetrie von Straßenpflastern

Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist **periodisch** und in unterschiedlichem Maße symmetrisch.



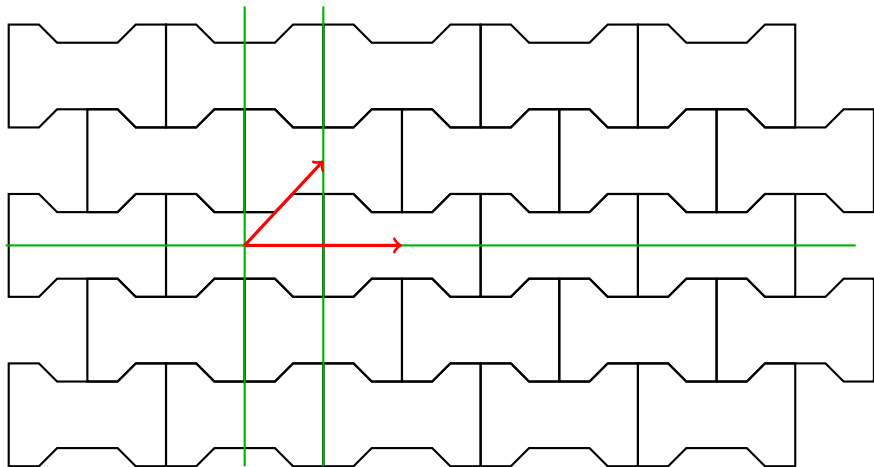
# Symmetrie von Straßenpflastern

Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist **periodisch** und in unterschiedlichem Maße symmetrisch.



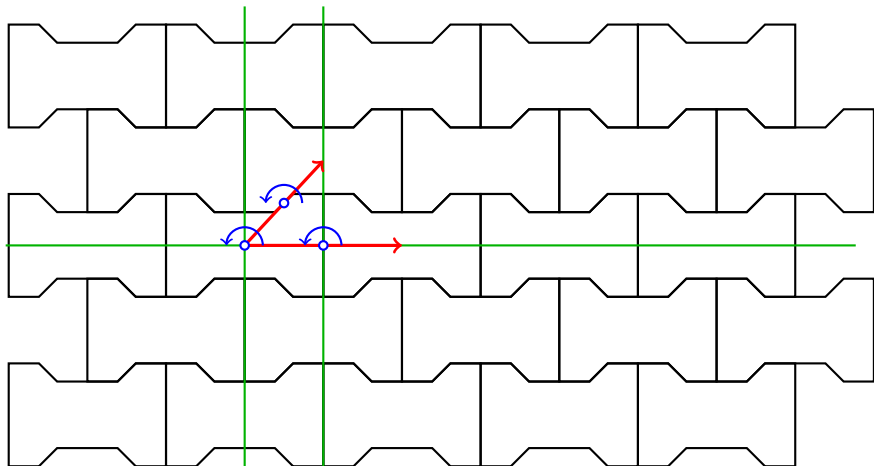
# Symmetrie von Straßenpflastern

Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist periodisch und in unterschiedlichem Maße **symmetrisch**.



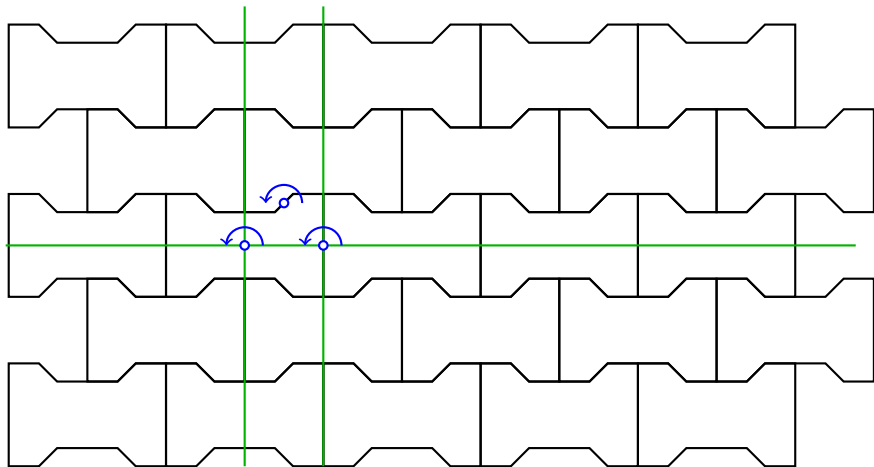
# Symmetrie von Straßenpflastern

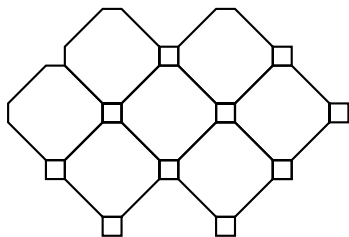
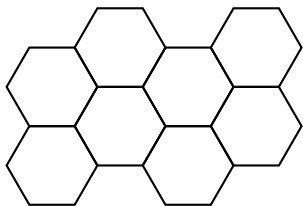
Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist periodisch und in unterschiedlichem Maße **symmetrisch**.



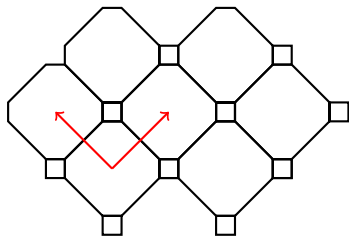
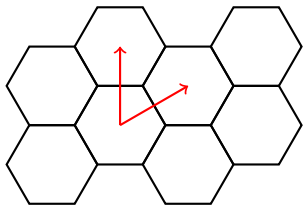
# Symmetrie von Straßenpflastern

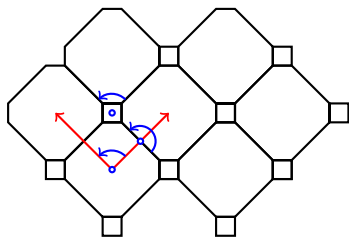
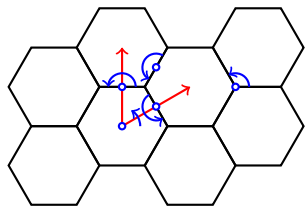
Straßenpflasterungen oder Badezimmerkachelungen sind meist periodisch und in unterschiedlichem Maße **symmetrisch**.



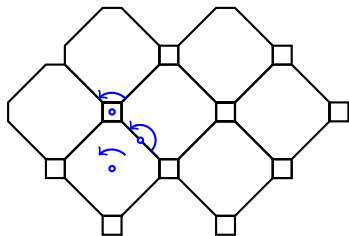
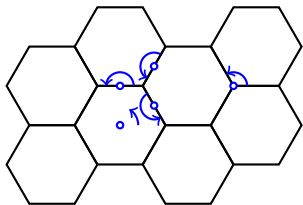


# Weitere Beispiele

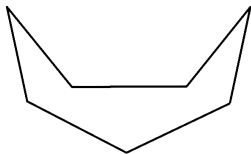
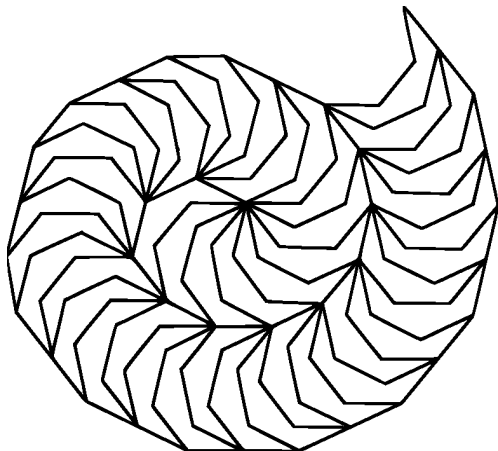




# Weitere Beispiele



# Beispiel einer nichtperiodischen Pflasterung



## Definition

Eine **Pflasterung** oder **Kachelung** ist eine **überlappungsfreie Überdeckung** der Ebene mit geometrischen Figuren, den sogenannten **Kacheln**.

## Definition

Eine **Pflasterung** oder **Kachelung** ist eine **überlappungsfreie Überdeckung** der Ebene mit geometrischen Figuren, den sogenannten **Kacheln**.

Die Kacheln sollen dabei beschränkt sein und keine Löcher besitzen, und es sollen nur endlich viele verschiedene Typen von Kacheln auftreten.

## Definition

Eine **Pflasterung** oder **Kachelung** ist eine **überlappungsfreie Überdeckung** der Ebene mit geometrischen Figuren, den sogenannten **Kacheln**.

Die Kacheln sollen dabei beschränkt sein und keine Löcher besitzen, und es sollen nur endlich viele verschiedene Typen von Kacheln auftreten.

## Definition

Eine Kachelung heißt **periodisch**, wenn sie Verschiebungen in zwei verschiedene Richtungen als Symmetrien besitzt; andernfalls heißt sie **nichtperiodisch**.

## Definition

Eine **Pflasterung** oder **Kachelung** ist eine **überlappungsfreie Überdeckung** der Ebene mit geometrischen Figuren, den sogenannten **Kacheln**.

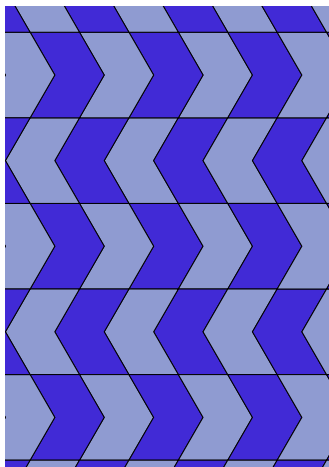
Die Kacheln sollen dabei beschränkt sein und keine Löcher besitzen, und es sollen nur endlich viele verschiedene Typen von Kacheln auftreten.

## Definition

Eine Kachelung heißt **periodisch**, wenn sie Verschiebungen in zwei verschiedene Richtungen als Symmetrien besitzt; andernfalls heißt sie **nichtperiodisch**.

Periodische Kachelungen kommen in der Natur z. B. als Ebene Schnitte durch Kristalle vor!

# Beispiele für Rotationswinkel in periodischen Pflasterungen

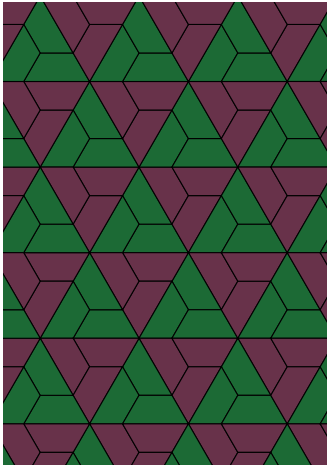


Kleinsten Rotationswinkel:

$$\longrightarrow 180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

<http://www.tilingsearch.org>, CC-BY-NC-SA

# Beispiele für Rotationswinkel in periodischen Pflasterungen



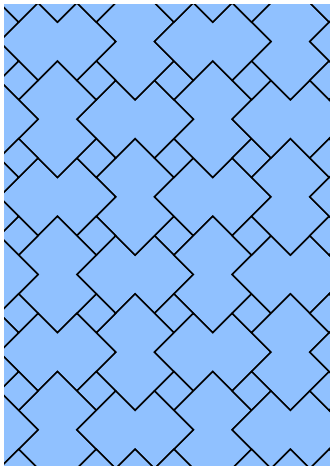
Kleinsten Rotationswinkel:

$$180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\longrightarrow 120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

<http://www.tilingsearch.org>, CC-BY-NC-SA

# Beispiele für Rotationswinkel in periodischen Pflasterungen



<http://www.tilingsearch.org>, CC-BY-NC-SA

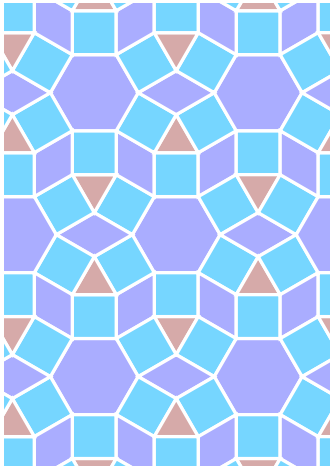
Kleinsten Rotationswinkel:

$$180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

$$120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

$$\longrightarrow 90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$$

# Beispiele für Rotationswinkel in periodischen Pflasterungen



<http://www.tilingsearch.org>, CC-BY-NC-SA

Kleinsten Rotationswinkel:

$$180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

$$120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

$$90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$$

$$\longrightarrow 60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$$

## Satz (Kristallographische Restriktion)

*Eine periodische Pflasterung besitzt keine Rotationssymmetrie um andere Winkel als*

$$180^\circ = \frac{360^\circ}{2}, \quad 120^\circ = \frac{360^\circ}{3},$$
$$90^\circ = \frac{360^\circ}{4} \text{ oder} \quad 60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$$

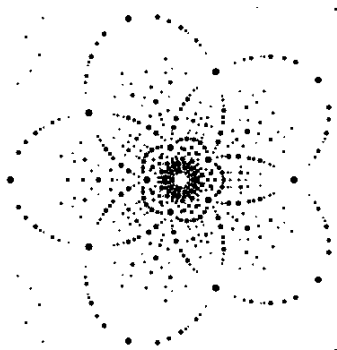
## Satz (Kristallographische Restriktion)

*Eine periodische Pflasterung besitzt keine Rotationssymmetrie um andere Winkel als*

$$180^\circ = \frac{360^\circ}{2}, \quad 120^\circ = \frac{360^\circ}{3},$$
$$90^\circ = \frac{360^\circ}{4} \text{ oder } 60^\circ = \frac{360^\circ}{6};$$

*insbesondere also keine Rotationssymmetrie um den Winkel*

$$72^\circ = \frac{360^\circ}{5}.$$

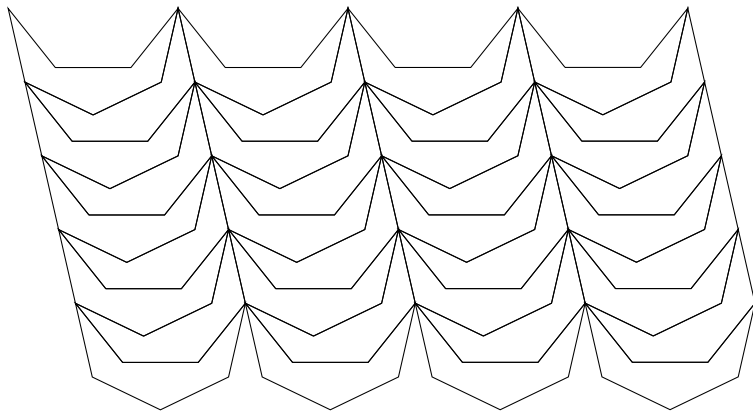


z. B. Al-Mn, Al-Li-Cu, ...

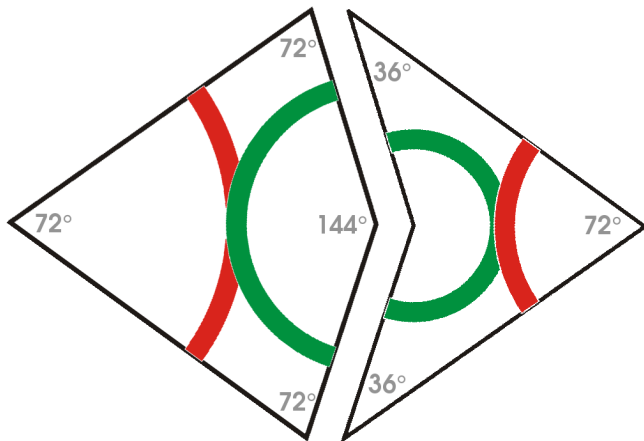
Offenbar gibt es nicht-periodische Kachelungen. Gibt es Kacheln, die **nur** nicht-periodische Kachelungen zulassen (sogenannte **aperiodische Sätze von Kacheln**)?

# Aperiodische Kacheln

Offenbar gibt es nicht-periodische Kachelungen. Gibt es Kacheln, die **nur** nicht-periodische Kachelungen zulassen (sogenannte **aperiodische Sätze von Kacheln**)?

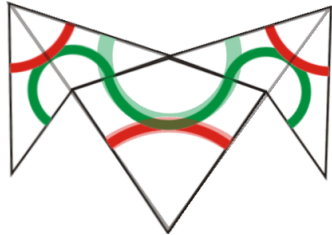
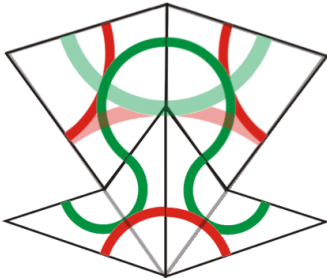


# Penrose' Drachen und Pfeile („The Penrose Aperiodic Tiles“)

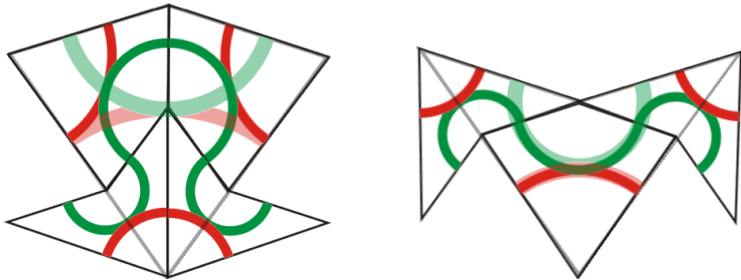


# Zerlegung und Inflation

Die Drachen und Pfeile können wie folgt in kleinere Drachen und Pfeile unterteilt werden:

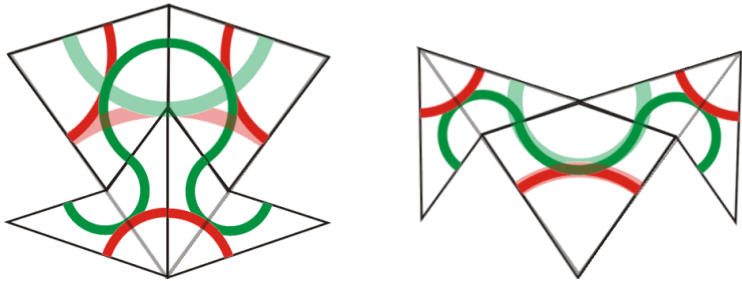


Die Drachen und Pfeile können wie folgt in kleinere Drachen und Pfeile unterteilt werden:



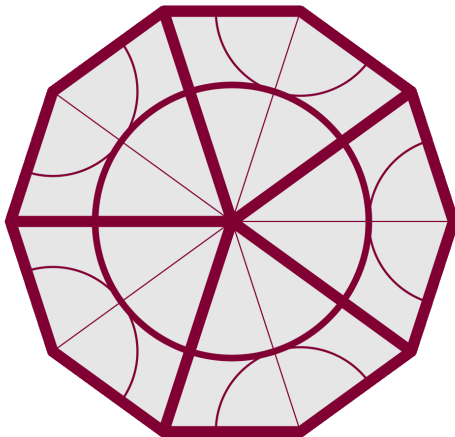
Dieser Vorgang ist kompatibel mit Pflasterungen.

Die Drachen und Pfeile können wie folgt in kleinere Drachen und Pfeile unterteilt werden:



Dieser Vorgang ist kompatibel mit Pflasterungen.  
Durch Aufblasung erhält man Pflasterungen beliebig großer  
Bereiche und somit eine Pflasterung der ganzen Ebene!

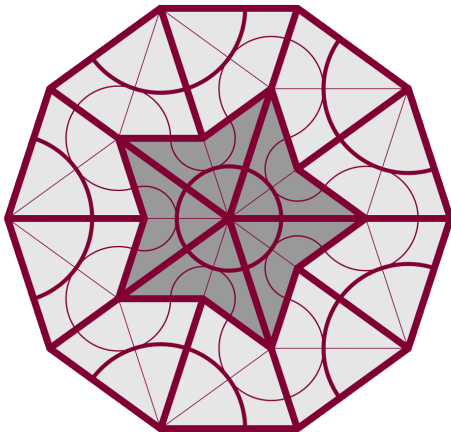
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



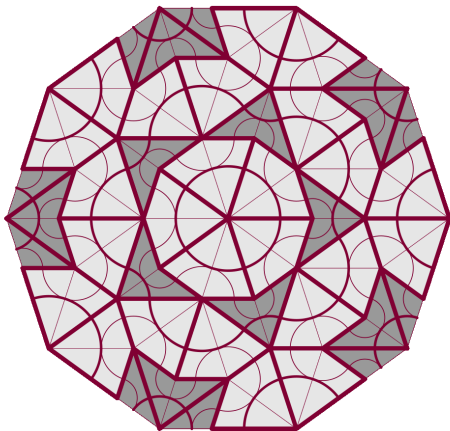
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



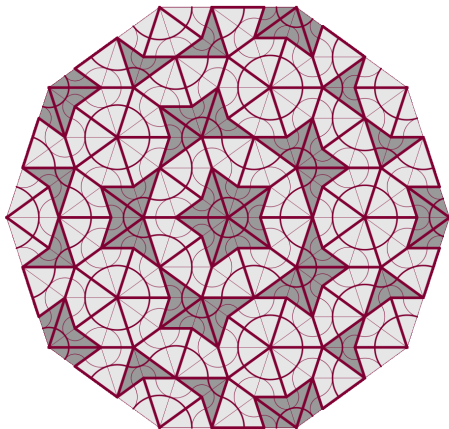
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



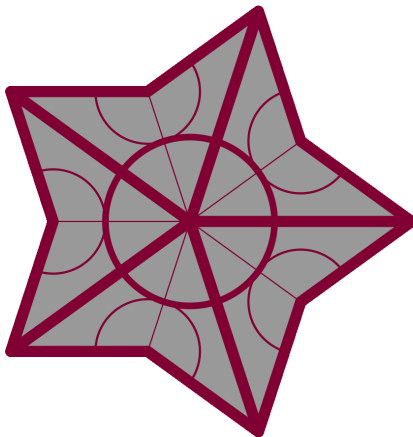
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



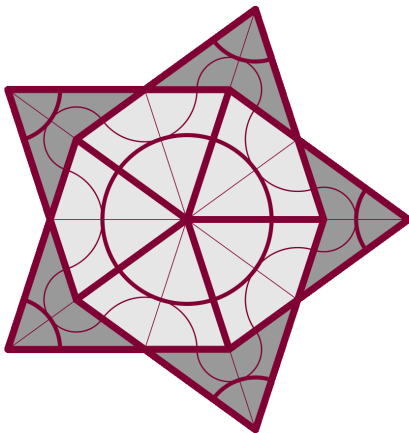
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



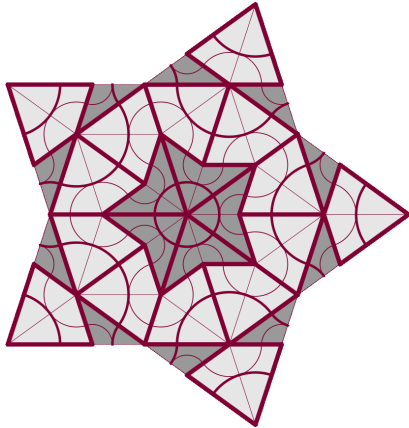
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



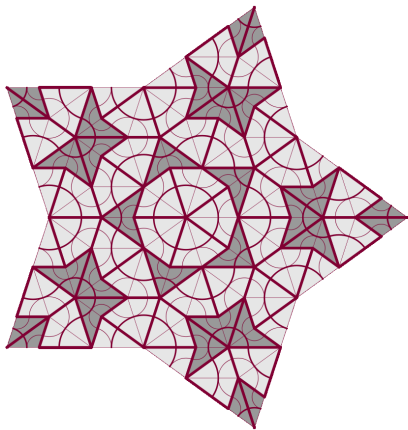
# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



# Zerlegung und Inflation: Erste Schritte



<http://en.wikipedia.org/wiki/User:Tovrstra>, CC-BY-SA



# The Penrose Aperiodic Chickens

