Diskrete Methoden in Algebra und Algebraischer Geometrie

Ein Bericht über Forschung und Lehre

Christian Haase

Dies ist ein Bericht über die Forschung, die ich betrieben, über die Vorlesungen, die ich gehalten und über die Studenten und Postdocs, die ich betreut habe.

Mein Forschungsgebiet ist zwischen den mathematischen Disziplinen *Diskrete Mathematik* und *Algebraische Geometrie* angesiedelt. Um das Wechselspiel zwischen Algebra und Kombinatorik und meine Beiträge dazu zu illustrieren, erkläre ich exemplarisch drei meiner Resultate, die ich zusammen mit verschiedenen Koautoren erzielt habe.

- Eine alte Vermutung von Micha Perles über Facettengraphen von Polytopen konnte widerlegt werden (siehe §1.1 Die Perles-Vermutung).
- Ein Endlichkeitssatz von Lagarias/Ziegler konnte entscheidend verallgemeinert werden (siehe §1.2 Adjunktion und Ehrhart-Theorie).
- Die Theorie der Linearsysteme auf algebraischen Kurven konnte auf tropische Kurven übertragen werden (siehe §1.3 Linearsysteme auf tropischen Kurven).

Für eine detailliertere Beschreibung meiner Forschungsaktivitäten mit umfangreichen Referenzen möchte ich auf den Forschungsbericht 2005-2008 meiner Emmy Noether Gruppe verweisen [Haa08].

1 Forschung

Das erste eigene Ergebnis habe ich in meiner Diplomarbeit erzielt. Es ist dem Gebiet Algebraische Topologie zuzuordnen. Während der Promotion habe ich mich dann mit einem völlig anderen Gebiet, der Polytoptheorie beschäftigt. Die topologische Grundausbildung kam mir dann aber nach der Promotion zugute. Wie ich weiter unten erläutere, ermöglichte es mir ein neuer, topologischer Blickwinkel, die lange offene Perles-Vermutung zu widerlegen. Als Postdoc an der UC Berkeley und an der Duke University habe ich mich dann mehr und mehr der Algebraischen Geometrie zugewendet – dem Gebiet, das die Motivation für viele der in meiner Dissertation erzielten Resultate liefert.

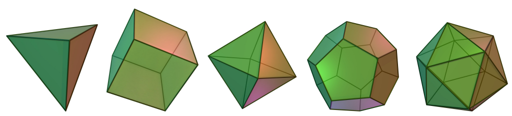
Auch heute interessieren mich insbesondere Fragestellungen, die Methoden aus mindestens zwei mathematischen Bereichen erfordern. Dabei sind mir die Algebra und die Diskrete Mathematik besonders ans Herz gewachsen. Hier konnte ich auch eigene Impulse setzen – mit eigenen Arbeiten, und dadurch, dass ich Forscher aus verschiedenen Gebieten auf von mir organisierten Konferenzen und Workshops zusammengebracht habe.

Die internationale Aktualität der Schnittstelle Diskrete Mathematik/Algebraische Geometrie wird reflektiert durch Themenjahre (etwa Applicable Algebraic Geometry, Institute for Mathematics and its Applications IMA, 2006/7) bzw. Themensemester (etwa Tropical Geometry, MSRI, Fall 2009; Algebraic Geometry with a View Towards Applications, Mittag-Leffler Institute, Spring 2011) an führenden internationalen mathematischen Forschungsinstituten und auch durch die aktuelle Ausgründung der Activity Group Algebraic Geometry der SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics).

1.1 Diskrete Mathematik: Polytope

> „*Why study polytopes? Because they are so beautiful, intriguing, and important, and because there are so many interesting questions about polytopes waiting to be studied and solved.*“ [Zie00]

Konvexe Polytope haben seit der Antike nicht nur Mathematiker fasziniert. Die platonischen Körper

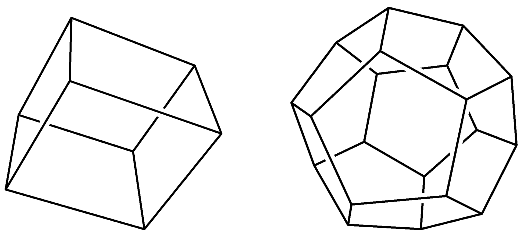


Graphiken: Wikipedia

sind die prominentesten und mystifiziertesten Vertreter ihrer Art. Seit George Dantzigs Simplexalgorithmus war lineare Optimierung eine treibende Kraft der Polyedertheorie, und dies ist sicher eine der erfolgreichsten Anwendungen von Mathematik in der wirklichen Welt. In den 1960er Jahren hat Branko Grünbaums Buch [Grü03] Polytoptheorie als eigenständigen Zweig der Mathematik etabliert. Eine umfassendere Antwort auf die Frage „Why study polytopes?“ findet man in dem eingangs zitierten Artikel [Zie00].

Die Perles-Vermutung

Wenn wir dreidimensionale Polytope darstellen, zeichnen wir meistens nur ihren Ecken-Kanten-Graphen, ohne zu kennzeichnen, welche Ecken eine Seitenfläche aufspannen.



Dies ist gerechtfertigt durch ein altes Theorem von Hassler Whitney, welches besagt, dass die Seitenflächen genau den nicht-trennenden induzierten Kreisen des Graphen entsprechen [Whi32].

Micha Perles fragte in den 1970er Jahren, ob eine analoge Aussage auch in höheren Dimensionen gilt [Per70]. Diese Frage ist wichtig für das Rekonstruktionsproblem von Polytopen [Kal93]. Sogenannte einfache Polytope können theoretisch von ihrem Graphen rekonstruiert werden [BML87, Kal88]. Eine positive Antwort auf Perles Frage würde die praktische Rekonstruktion sehr vereinfachen [AK00, JKK02].

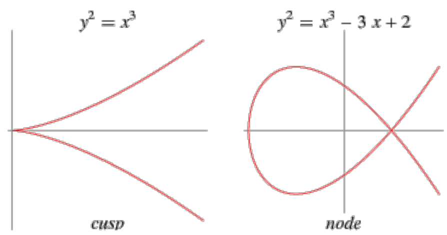
In einer gemeinsamen Arbeit mit Günter Ziegler konnten einige Klassen von Polytopen angegeben werden, für die Perles Vermutung gilt. Das Hauptergebnis der Arbeit zeigt jedoch, vielleicht überraschenderweise, dass Perles Vermutung im Allgemeinen falsch ist [HZ02]: wir beobachten, dass das duale, simpliziale Polytop eines potentiellen Gegenbeispiels ein topologisches Hindernis für die Gültigkeit der Perles-Vermutung enthalten muss. Solche eigentümlichen Hindernisse waren in der Literatur schon unter den Namen Bings Haus und Zeemans Narrenkappe bekannt. Wir konstruieren dann ein Polytop, das auf geeignete Weise Bings Haus enthält.

Basierend auf unserer Konstruktion hat Nikolaus Witte ein konkretes „kleines“ vierdimensionales Gegenbeispiel mit 2592 Ecken und 529 Facetten angegeben [Wit03].

1.2 Algebraische Geometrie: Torische Varietäten

> „The study of toric varieties is a wonderful part of algebraic geometry that has deep connections with polyhedral geometry. [...] There are elegant theorems, unexpected applications, and, as noted by Fulton, “toric varieties have provided a remarkably fertile testing ground for general theories.” “[CLS11]

Algebraische Geometrie beschäftigt sich mit der Geometrie von Nullstellenmengen von Polynomen in mehreren Veränderlichen. Zum Beispiel ist der Einheitskreis die Nullstellenmenge des Polynoms x^2+y^2-1 im $\mathbb{R}^2$. Die Nullstellen eines Polynoms vom Grad drei in zwei Variablen ist eine elliptische Kurve.



Graphik: Wolfram MathWorld

Einem konvexen Polytop kann man mithilfe des einfachen Prinzips

$$\begin{array}{ccc} \text{ganzzahliger Vektor} & & \text{Monom} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \leftrightarrow & x_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{v_n} \end{array}$$

eine solche algebraische Varietät – eine torische Varietät – zuordnen. Die Theorie torischer Varietäten hat sich zu einem etablierten und sehr aktiven Forschungsgebiet entwickelt [CLS11, Ful93].

Adjunktion und Ehrhart-Theorie

Viele Zählprobleme in Algebra, Darstellungstheorie und Kombinatorik können als das Zählen von Gitterpunkten in Polytopen formuliert werden [Loe05, BR07]. Ein fundamentaler Satz von Eugène Ehrhart besagt, dass die Anzahl von Gitterpunkten in Streckungen kP eines Gitterpolytops P polynomiell von $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ abhängt. (Siehe [Ehr67, BR07].) Deshalb hat die Erzeugendenfunktion eine spezielle Form:

$$\sum_{k \geq 0} \#(kP \cap \mathbb{Z}^n)\; t^k \;=\; \frac{h^*(t)}{(1-t)^{n+1}}\,,$$

für ein Polynom $h^* \in \mathbb{Z}[t]$ vom Grad $d \leq n$.

Eine Leitfrage der Ehrhart-Theorie ist zu bestimmen welche Polynome sich als Ehrhart-Polynome von Gitterpolytopen realisieren lassen. Während eine Beantwortung dieser Frage noch vor fünf Jahren als komplett hoffnungslos galt, wissen wir heute wesentlich mehr als noch vor wenigen Jahren. Angestoßen durch zwei von mir mitorganisierte Snowbird-Konferenzen haben viele Autoren neue Schranken für Ehrhart-Polynome bewiesen [BDLD$^+$05, Tre07, HT09, Pay08, Sta09a, Sta09b]. Sie benutzten dabei Methoden aus der Kombinatorik, der kommutativen Algebra und additiver Zahlentheorie.

Falls das Polynom h^* von einem Gitterpolytop P kommt, was sagt uns h^* über P? Welche strukturellen Einschränkungen impliziert das Ehrhart-Polynom? Was passiert, zum Beispiel, wenn der Grad d von h^* sehr viel kleiner ist, als die Dimension n von P? In diesem Kontext hat sich kürzlich die Beziehung zur algebraischen Geometrie, insbesondere zur Adjunktionstheorie [BS95] als nützlich erwiesen.

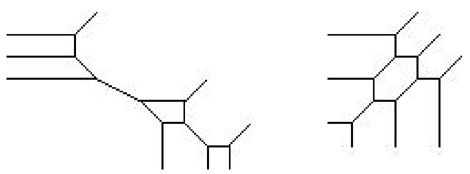
In gemeinsamer Arbeit [HNP09] mit Benjamin Nill und Sam Payne habe ich für $d \ll n$ ein Struktursatz bewiesen, in dessen Konsequenz wir eine Vermutung [Bat07, BN07b] von Victor Batyrev bestätigen konnten: bis auf Pyramidenkonstruktionen gibt es nur endlich viele Polytope mit gegebenem Grad d und Leitkoeffizient h_d^*. Dies ist eine weitreichende, dimensionsüberspannende Verallgemeinerung eines Satzes von Jeffrey Lagarias und Günter Ziegler [LZ91], welcher sagt, dass es in fester Dimension nur endlich viele Polytope mit gegebener positiver Anzahl innerer Gitterpunkte gibt.

In diesem Zusammenhang wird es auch in der näheren Zukunft einen regen Austausch zwischen algebraischer Geometrie und Ehrhart-Theorie geben. So haben Alicia Dickenstein, Sandra Di Rocco, und Ragni Piene [DRP08] unsere Schranken unter Zusatzvoraussetzungen verschärft. In einem laufenden Projekt mit Benjamin Nill und Sandra Di Rocco führen wir flexiblere Invarianten ein und beweisen allgemeinere Projektionssätze.

1.3 Tropische Geometrie

> „In tropical algebra, the sum of two numbers is their minimum and the product of two numbers is their sum. [...] The adjective “tropical” was coined by French mathematicians, notably Jean-Eric Pin, to honor their Brazilian colleague Imre Simon, who pioneered the use of min-plus algebra in optimization theory. There is no deeper meaning in the adjective “tropical”. It simply stands for the French view of Brazil.“ [MS10]

Tropische Geometrie ist algebraische Geometrie über dem min-plus Halbring. Tropische Varietäten sind degenerierte, stückweise lineare Schatten algebraischer Varietäten.



Graphik: Hannah Markwig

Zwei tropische elliptische Kurven

Dies ist ein neues, schnell wachsendes Gebiet. In den letzten Jahren ist eine wahre Flut tropischer

Arbeiten erschienen und mehrere Bücher werden gerade geschrieben (siehe z.B. [MS10, Mik, Jos, IMS09, Gat06, RGST05]). Tropische Methoden wurden schon sehr erfolgreich in enumerativer Geometrie [Mik05, FM10, IKS04, IKS], dynamischen Systemen [EKL06], algorithmischer Algebra [STY07, DFS07], und algebraischer Statistik [PS05] eingesetzt.

Linearsysteme auf tropischen Kurven

Während die Frage nach den „richtigen" Definitionen der tropischen Kategorie noch diskutiert wird, sind diese grundlegenden Fragen deutlich einfacher in Dimension eins. Eine tropische Kurve ist ein metrischer Graph mit möglicherweise unbeschränkten Kanten. Für Kurven können wir anfangen Fragen über Divisoren, Linearsysteme, Familien und Moduli zu stellen, oder die Theorie für algorithmische Zwecke zu nutzen.

Einige Aspekte der klassischen Theorie der Linearsysteme lassen sich auf die tropische Situation übertragen. Insbesondere gibt es einen tropischen Riemann-Roch-Satz [BN07a, MZ06, GK08]. Lineare Äquivalenz von tropischen Divisoren auf Kurven ist eine kontinuierliche Version des in der Informatik intensiv studierten „chip firing games", das auch unter dem Namen „sand pile model" bekannt ist [BLS91].

Zusammen mit Josephine Yu und Gregg Musiker konnte ich tropische Linearsysteme als endlich erzeugte tropische Moduln identifizieren und so die Grundlage für das Studium von projektiven Einbettungen von Kurven legen [HMY11]. Wir wissen jetzt, was die tropischen Versionen von kanonischen Einbettungen beziehungsweise hyperelliptischen Kurven sind.

Mittlerweile konnten Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne und Elina Robeva diesen tropischen Apparat nutzen um einen neuen Beweis des klassischen Brill-Noether Satzes zu führen [CDPR10].

Literatur

[AK00] Hans Achatz and Peter Kleinschmidt. Reconstructing a simple polytope from its graph. In Gil Kalai and Günter M. Ziegler, editors, *Polytopes — Combinatorics and Computation*, volume 29 of *DMV Seminar*, pages 155–165. Birkhäuser, Basel, 2000.

[Bat07] Victor V. Batyrev. Lattice polytopes with a given h^*-polynomial. In Christos A. Athanasiadis et.al., editor, *Algebraic and geometric combinatorics*, volume 423 of *Comtemp. Math.*, pages 1–10, Providence, RI, 2007. American Mathematical Society.

[BDLD+05] M. Beck, J. A. De Loera, M. Develin, J. Pfeifle, and R. P. Stanley. Coefficients and roots of Ehrhart polynomials. In *Integer points in polyhedra—geometry, number theory, algebra, optimization*, volume 374 of *Contemp. Math.*, pages 15–36. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[BLS91] Anders Björner, László Lovász, and Peter W. Shor. Chip-firing games on graphs. *Eur. J. Comb.*, 12(4):283–291, 1991.

[BML87] Roswitha Blind and Peter Mani-Levitska. Puzzles and polytope isomorphisms. *Aequationes Math.*, 34:287–297, 1987.

[BN07a] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.

[BN07b] Victor V. Batyrev and Benjamin Nill. Multiples of lattice polytopes without interior lattice points. *Moscow Mathematical Journal*, 7:195–207, 2007.

[BR07] Matthias Beck and Sinai Robins. *Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer. xviii, 226 p., 2007.

[BS95] Mauro C. Beltrametti and Andrew J. Sommese. *The adjunction theory of complex projective varieties*, volume 16 of *Expositions in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[CDPR10] Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne, and Elina Robeva. A tropical proof of the Brill-Noether Theorem. `arXiv:1001.2774`, 2010.

[CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Hal Schenck. *Toric Varieties.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, to appear 2011. `http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html`.

[DFS07] Alicia Dickenstein, Eva Maria Feichtner, and Bernd Sturmfels. Tropical discriminants. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(4):1111–1133 (electronic), 2007.

[DRP08] Alicia Dickenstein, Sandra Di Rocco, and Ragni Piene. Classifying smooth lattice polytopes via toric fibrations. `arXiv:0809.3136`, 2008.

[Ehr67] Eugène Ehrhart. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. II. Systèmes diophantiens linéaires. *J. Reine Angew. Math.*, 227:25–49, 1967.

[EKL06] Manfred Einsiedler, Mikhail Kapranov, and Douglas Lind. Non-Archimedean amoebas and tropical varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 601:139–157, 2006.

[FM10] Sergey Fomin and Grigory Mikhalkin. Labeled floor diagrams for plane curves. *JEMS*, 12:1453–1496, 2010.

[Ful93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*, volume 131 of *Annals of Math. Studies*. Princeton University Press, 1993.

[Gat06] Andreas Gathmann. Tropical algebraic geometry. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 108(1):3–32, 2006.

[GK08] Andreas Gathmann and Michael Kerber. A Riemann-Roch theorem in tropical geometry. *Math. Z.*, 259(1):217–230, 2008.

[Grü03] Branko Grünbaum. *Convex polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.

[Haa08] Christian Haase. Emmy Noether Group Lattice Polytopes. Technical report, FU Berlin, December 2008. Research Report 2005-2008, available at `http://ehrhart.math.fu-berlin.de/daten/preprints/report05-08.pdf`.

[HMY11] Christian Haase, Gregg Musiker, and Josephine Yu. Linear systems on tropical curves. *Math. Z. in print*, 2011. eprint `arXiv:0909.3685`.

[HNP09] Christian Haase, Benjamin Nill, and Sam Payne. Cayley decompositions of lattice polytopes and upper bounds for h^*-polynomials. *J. Reine Angew. Math.*, 2009. to appear.

[HT09] Martin Henk and Makoto Tagami. Lower bounds on the coefficients of ehrhart polynomials. *European Journal of Combinatorics*, 30(1):70–83, 2009.

[HZ02] Christian Haase and Günter M. Ziegler. Examples and counterexamples for the Perles conjecture. *Discrete Comput. Geom.*, 28(1):29–44, 2002.

[IKS] Ilia V. Itenberg, Viatcheslav M. Kharlamov, and Eugenii I. Shustin. A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces. To appear in Commentarii Math. Helvetici.

[IKS04] Ilia V. Itenberg, Viatcheslav M. Kharlamov, and Eugenii I. Shustin. Logarithmic equivalence of the Welschinger and the Gromov-Witten invariants. *Uspekhi Mat. Nauk*, 59(6(360)):85–110, 2004.

[IMS09] Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Eugenii Shustin. *Tropical algebraic geometry*, volume 35 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2009.

[JKK02] Michael Joswig, Volker Kaibel, and Friederike Körner. On the k-systems of a simple polytope. *Israel J. Math.*, 129:109–117, 2002.

[Jos] Michael Joswig. *Introduction to Tropical Combinatorics*. Book in preparation.

[Kal88] Gil Kalai. A simple way to tell a simple polytope from its graph. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 49(2):381–383, 1988.

[Kal93] Gil Kalai. Some aspects of the combinatorial theory of convex polytopes. In T. Bisztriczky, P. McMullen, and A. Weiss, editors, *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, Proc., pages 205–230. NATO Advanced Study Institute, Kluwer Academic Publishers 1994, 1993.

[Loe05] Jesús A. De Loera. The many aspects of counting lattice points in polytopes. *Math. Semesterber.*, 52(2):175–195, 2005.

[LZ91] Jeffrey C. Lagarias and Günter M. Ziegler. Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice. *Canadian J. Math.*, 43(5):1022–1035, 1991.

[Mik] Grigory Mikhalkin. *Tropical geometry*. Book in preparation.

[Mik05] Grigory Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2):313–377 (electronic), 2005.

[MS10] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to Tropical Geometry*. In preparation, 2010.

[MZ06] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov. Tropical curves, their Jacobians and theta functions. eprint `math.AG/0612267`, 2006.

[Pay08] Sam Payne. Ehrhart series and lattice triangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 40(3):365–376, 2008.

[Per70] Micha A. Perles. Results and problems on reconstruction of polytopes. Jerusalem 1970, unpublished [Kal93]; problems posed in Oberwolfach 1984 and 1986 [BML87], 1970.

[PS05] Lior Pachter and Bernd Sturmfels, editors. *Algebraic statistics for computational biology*. Cambridge University Press, New York, 2005.

[RGST05] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemporary Mathematics*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Sta09a] Alan Stapledon. Inequalities and Ehrhart δ-vectors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(10):5615–5626, 2009.

[Sta09b] Alan Stapledon. Kneser's theorem and inequalities in Ehrhart theory. eprint `arXiv:0904.3035`, 2009.

[STY07] Bernd Sturmfels, Jenia Tevelev, and Josephine Yu. The Newton polytope of the implicit equation. *Mosc. Math. J.*, 7(2):327–346, 351, 2007.

[Tre07] Jaron Treutlein. Lattice polytopes of degree 2. `arXiv:0706.4178[math.CO]`, 2007.

[Whi32] Hassler Whitney. Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34(2):339–362, 1932.

[Wit03] Nikolaus Witte. A counterexample to the Perles conjecture. `http://www.eg-models.de/models/Polytopes/2002.04.001/`, 2003.

[Zie00] Günter M. Ziegler. Questions about polytopes. In Björn Enquist and Wilfried Schmid, editors, *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, pages 1195–1211. Springer–Verlag, 2000.

2 Lehre und Betreuung

2.1 Lehrveranstaltungen

Die ersten Lehrerfahrungen habe ich gleich nach dem Vordiplom in fünf Semestern als Übungsgruppenleiter für die Veranstaltung Höhere Mathematik für Ingenieure gesammelt. So habe ich früh hautnah miterlebt wie sich motivierende und weniger motivierende Vorlesungen bei den Studierenden auf die Einstellung zum Fach und letztlich auf den Lernerfolg auswirken.

Meine erste eigenverantwortliche Lehrveranstaltung war eine Vorlesung über Torische Varietäten an der TU Berlin, die ich noch als Doktorand gehalten habe. Seitdem habe ich an den verschiedenen Stationen meiner Karriere ein breites Spektrum abgedeckt: von der Anfängervorlesung im Service (Calculus) bis zum Spezialseminar für Doktoranden, vom Privatseminar mit vier Hörern bis zur Massenveranstaltung im überfüllten Hörsaal (siehe die vollständige Liste weiter unten).

An der FU Berlin hatte ich keine Lehrverpflichtung. Trotzdem habe ich neben unserem Arbeitsgruppenseminar freiwillig noch eine Reihe von weiteren Lehrveranstaltungen betreut.

Im Sommer 2007 hatte ich die Gelegenheit für das Graduiertenkolleg Methods for Discrete Structures ein dreimonatiges (Pre)Doc-Programm zu koordinieren. Ich konnte auswärtige Dozenten einladen, und das Graduiertenkolleg bot auswärtigen Studierenden Kurzstipendien zur Teilnahme an dem Programm. Das Dozententeam – Rekha Thomas, Raymond Hemmecke, Matthias Beck und ich – erhielten den ersten Preis bei der Fachbereichsinternen Lehrevaluation. Sieben Teilnehmer dieses Programms habe ich später bei einem Workshop über tropische Geometrie am MSRI in Berkeley wiedergetroffen.

Angeregt durch eine hochschuldidaktische Fortbildung "Didaktik (zu) großer Lehrveranstaltungen" habe ich meine Erstsemestervorlesung Lineare Algebra im Winter 2007/8 mit einem Projekt begonnen. Während zwei intensiver Wochen haben sich die Studierenden in Gruppen eigenständig die Mathematik hinter Googles Pagerank erarbeitet und ihre Ergebnisse in einer Posterausstellung am Fachbereich präsentiert. Dies war koordiniert mit den Parallelveranstaltungen Computerorientierte Mathematik und Analysis. Der zweite Teil dieser Linearen Algebra brachte mir den zweiten Preis bei der Fachbereichsinternen Lehrevaluation 2008.

Zusammen mit Benjamin Nill und Andreas Paffenholz schreibe ich an einem Textbuch über Gitterpolytope. Als ersten Testlauf haben wir im Sommer 2009 gemeinsam eine Vorlesung an der FU Berlin gehalten, den zweiten Testlauf gab es diesen Sommer in Frankfurt. Hier habe ich mit Tobias Lamm eine einwöchige Frühjahrsschule organisiert und ich werde Osterferien 2012 die Schüler-AG leiten.

Vollständige Liste

Die folgende Tabelle enthält alle Vorlesungen, die ich gehalten und alle Seminare, die ich organisiert und betreut habe. Dabei werden die folgenden Abkürzungen benutzt.

In der zweiten Spalte für die Universität:
GU – Goethe-Universität Frankfurt (M)
FUB – FU Berlin
HH – Universität Hamburg
MPI – MPI für molekulare Genetik
Duke – Duke University
UCB – UC Berkeley
TUB – TU Berlin

In der dritten Spalte für die Unterrichtsform:
C – Vorlesung
E – Übung zu einer Vorlesung
S – Seminar

Sommer 12	GU	CE	Diskrete Mathematik
Frühjahr 12	GU	CE	Schüler-AG
Winter 11	GU	C	Kombinatorik & kommutative Algebra
Winter 11	GU	S	Torische Ideale
Sommer 11	GU	CE	Gitterpolytope
Winter 10	GU	C	PreMaster Programm (mit Tobias Lamm)
Sommer 10	FUB	S	Solving Systems of Polynomial Equations (mit Ralf Kornhuber)
Sommer 09	HH	CE	Riemannsche Flächen
Sommer 09	HH	C	Polyedrische Algebra
Sommer 09	FUB	C	Gitterpolytope (mit Benjamin Nill und Andreas Paffenholz)
Sommer 08	FUB	C	Lineare Algebra 2
Winter 07	FUB	C	Lineare Algebra 1
Sommer 07	FUB	CE	(Pre)Doc Course (mit Rekha Thomas, Raymond Hemmecke, und Matthias Beck)
Winter 06	FUB	C	Combinatorial Commutative Algebra
Sommer 06	FUB	S	Gitterpolytope
Winter 05	FUB	CE	Gitterpolytope
Winter 05	MPI	S	Algebraic Statistics (led by Alexander Schliep)
Frühjahr 05	Duke	CE	Linear Optimization
Frühjahr 05	Duke	S	Combinatorial Commutative Algebra
Herbst 04	Duke	CE	Laboratory Calculus
Herbst 04	Duke	S	Solving Systems of Polynomial Equations
Sommer 04	Duke	CE	Laboratory Calculus
Frühjahr 04	Duke	CE	Linear Optimization
Frühjahr 04	Duke	S	Toric Varieties
Herbst 03	Duke	CE	Combinatorics
Frühjahr 03	Duke	CE	Combinatorics
Frühjahr 03	Duke	S	Discrete Optimization
Herbst 02	Duke	CE	Combinatorics
Herbst 02	Duke	CE	Topology
Frühjahr 02	Duke	CE	Combinatorics
Herbst 01	Duke	CE	Topology
Frühjahr 01	UCB	CE	Linear Algebra
Herbst 00	UCB	CE	Multivariate Calculus (Hons.)
Herbst 00	UCB	CE	Linear Algebra
Sommer 00	TUB	E	Algebraische Topologie (für Lehramtskandidaten)
Sommer 00	TUB	E	Graphen- und Netzwerkalgorithmen
Winter 99	TUB	C	Toric Varieties

2.2 Betreuung und Mentoring

2009–	Doktoranden Kaie Kubjas (mit Altmann), Benjamin Lorenz
2010	Bachelorarbeit David Ditter, Laura Gellert
2009-2010	Postdoc Dr. Felix Breuer
2008-2010	Mitglied der Kommission zu „Mentoring, Gender and Diversity“ der Berlin Mathematical School (BMS)
2007-2010	BMS Mentor von César Ceballos, Laura Hinsch, Raman Sanyal, Andreas Wiese
2005-2010	Postdoc Dr. Andreas Paffenholz
2008-2009	Diplomarbeit Benjamin Lorenz [arXiv:1001.0514]
2005-2009	Postdoc Dr. Benjamin Nill
2006-2007	Diplomarbeit Matthias Lenz [arXiv:0709.3570]
2003-2004	undergraduate research mit Lindsay Piechnik