Das Münzproblem von Frobenius

Annkathrin Brauer

Sommersemester 2009

1 Fibonacci-Zahlen

Mittels der Erzeugendenfunktion $F(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, der Partialbruchzerlegung und der geometrischen Reihe ist es möglich die Formel

$$f_0 = 0\,, \quad f_1 = 1\,, \quad f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \quad \text{in die Formel} \quad f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

umzuwandeln. Mit dieser Formel benötigt man nicht mehr die vorherigen Folgenglieder um eine Stelle der Fibonacci-Zahlen zu berechnen. (Ausführlicher wird dies im Skript "Einführung in die computerorientierte Mathematik" von Prof.Dr.Torsten Theobald.)

2 Partialbruchzerlegung

Zur jeder rationalen Funktion

$$F(z) := \frac{p(z)}{\prod_{k=1}^m (z-a_k)^{e_k}}$$

wobei p ein Polynom vom Grad kleiner als $e_1 + e_2 + ... + e_m$ ist und die a_k's paarweise verschieden sind, gibt es eine Zerlegung

$$F(z) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{c_{k,1}}{z-a_k} + \frac{c_{k,2}}{(z-a_k)^2} + ... + \frac{c_{k,e_k}}{(z-a_k)^{e_k}}\right)$$

wobei die $c_{k,j} \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Nullstellen des Nennerpolynoms: $x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Zerlegung des Nennerpolynoms: $1 - z - z^2 = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)$

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} + \frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z} = \frac{A(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z) + B(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z)}{(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z)(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z)}$$

$$\Leftrightarrow z = A - A\frac{1-\sqrt{5}}{2}z + B - B\frac{1+\sqrt{5}}{2}z \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$\Rightarrow z = -A\frac{1-\sqrt{5}}{2}z + A\frac{1+\sqrt{5}}{2}z = \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)Az = \sqrt{5}Az$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Partialbruchzerlegung: $\quad f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}$

3 Frobenius-Zahl

Problem:

- Wir haben nicht die uns gewohnten Münzen 1,2 und 5 Cent und ihre Zehnerpotenzvielfache, sondern Münzen mit den Werten $a_1, a_2, ..., a_d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, die ohne einen gemeinsamen Teiler sind.

  $$A = \{a_1, a_2, ..., a_d\} \qquad ggT(a_1, a_2, ..., a_d) = 1$$

  Wir nennen ein $n \in \mathbb{N}$ darstellbar, falls $m_1, m_2, ..., m_d \in \mathbb{N}$ existieren,
  sodass $n = m_1 a_1 + ... + m_d a_d$.

- Welcher ist der größte Betrag, der in unserem neuen Münzsystem nicht dargestellt werden kann? Diesen Betrag nennen wir Frobenius-Zahl $g(a_1, a_2, ..., a_d)$.

Beispiel: Wir haben zwei Münzen mit den Werten 2 Cent und 7 Cent. An diesem Beispiel ist es leicht zu erkennnen $g(2,7) = 5$, da alle geraden Zahlen durch die 2 dargestellt werden und alle ungeraden Zahlen größer als 7 durch die Addition mit Vielfachen von 2 dargestellt werden können.

4 Eingeschränkte Partitionsfunktion und ihre geometrische Bedeutung

Die eingeschränkte Partitionsfunktion

$$p_A(n) := \#\{(m_1, ..., m_d) \in \mathbb{Z}^d : \text{ alle } m_j \geq 0 \text{ und } m_1 a_1 + ... + m_d a_d = n\}$$

ist die Anzahl der additiven Partitionen von n mit Teilen aus A. $g(a_1, ..., a_d)$ ist demnach die größte ganze Zahl n für die $p_A(n) = 0$ gilt.
Zur geometrischen Interpretation definieren wir die Menge

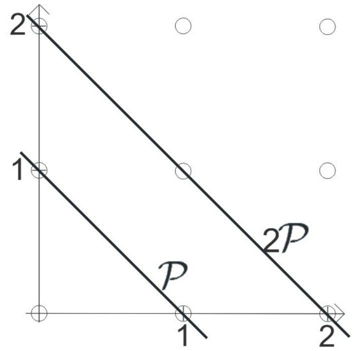
$$\mathcal{P} = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d : \text{ alle } x_j \geq 0 \text{ und } x_1 a_1 + ... + x_d a_d = 1\}$$

Die n-te Streckung einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ ist:

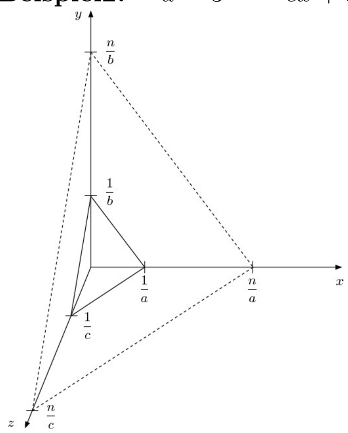
$$\{(nx_1, nx_2, ..., nx_d) : (x_1, ..., x_d) \in S\}$$

Die Funktion $p_A(n)$ zählt die Gitterpunkte (Punkte bei denen alle $x_j \in \mathbb{N}$) die in der n-ten Streckung von $\mathcal{P}$ liegen. Bei der Streckung um den Wert n ersetzt man $x_1 a_1 + ... + x_d a_d = 1$ in der Definition von $\mathcal{P}$ durch $x_1 a_1 + ... + x_d a_d = n$, man kann aber auch $\mathcal{P}$ durch $n\mathcal{P}$ ersetzten.

Beispiel1: $d = 2$ $\quad 1x + 1y = 1$



Beispiel2: $d = 3$ $\quad cx + ay + bz = 1$



5 Partialbrüche und eine überraschende Formel

Wir beginnen mit $d = 2$ und betrachten

$$p_{\{a,b\}}(n) = \#\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 : \ k,l \geq 0, \ ak + bl = n\}$$

Ziel: Finde eine Formel um die Anzahl der additiven Partitionen von n mit a und b zu berechnen!
Mit Hilfe der geometrischen Reihe kommt man auf die Erzeugendenfunktion.

$$\left(\frac{1}{1-z^a}\right)\left(\frac{1}{1-z^b}\right) = (1 + z^a + z^{2a} + ...)(1 + z^b + z^{2b} + ...) = \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} z^{ak}z^{bl} = \sum_{n\geq 0} p_{\{a,b\}}(n)z^n$$

Um auf den letzten Schritt zu kommen muss man wissen, dass wenn wir alle Terme der geometrischen Reihen ausmultiplizieren eine Potenzreihe erhalten, in der alle Exponenten Kombinationen aus a und b sind. Die Koeffizienten vor den Potenzen zählen auf, wie oft man den Exponenten durch die Zahlen a und b darstellen kann.

Zwischenbeispiel: $a = 2$ $\quad b = 5$

$$\left(\frac{1}{1-z^2}\right)\left(\frac{1}{1-z^5}\right) = (1 + z^2 + z^{2\cdot 2} + z^{3\cdot 2} + z^{4\cdot 2} + z^{5\cdot 2} + ...)(1 + z^5 + z^{2\cdot 5} + z^{3\cdot 5} + ...)$$

$$= 1 + 0 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4 + 1 \cdot z^5 + 1 \cdot z^6 + 1 \cdot z^7 + 1 \cdot z^8 + 1 \cdot z^9 + \underbrace{2 \cdot z^{10}}_{(*)} + ...$$

$$(*) 10 = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \quad , \qquad 10 = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 5$$

Ähnlich wie bei den Fibonacci-Zahlen wollen wir mittels Erzeugendenfunktion eine explizite Formel für $p_{a,b}(n)$ finden. Hier ist es von Vorteil, wenn man die Reihe durch z^n teilt und dann den Absolutkoeffizienten berechnet.

$$f(z) := \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} = \sum_{k\geq 0} p_{\{a,b\}}(k)z^{k-n}$$

Der Absolutkoeffizient ist in unserem Fall sehr vorteilhaft, da wir so nur $z = 0$ betrachten müssen. Mit dem Teilen durch z^n verschieben wir die Exponenten nach "links", jedoch bleiben die Koeffizienten fest stehen.

Zwischenbeispiel: $a = 2$, $b = 5$, $n = 10$

$$\left(\frac{1}{1-z^2}\right)\left(\frac{1}{1-z^5}\right) = 1 + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + \mathbf{2 \cdot z^{10}} + z^{11} + 2 \cdot z^{12} + ...$$

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)z^{10}} = z^{-10} + z^{-8} + z^{-6} + z^{-5} + z^{-4} + z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + \mathbf{2} + z^1 + 2 \cdot z^2 + ...$$

Bevor man $z = 0$ betrachtet, muss man alle Terme mit negativen Exponenten abziehen, da man sonst durch Null teilen würde.

Mit Hilfe der Einheitwurzel und der Partialbruchzerlegung kommen wir auf eine Formel für $p_{\{a,b\}}(n)$:

$$p_{\{a,b\}}(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}} + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1}\frac{1}{(1-\xi_b^{ja})\xi_b^{jn}}$$

Die Variable ξ_a ist die a-te Einheitswurzel:

$$\xi_a = e^{\frac{2\pi i}{a}} \quad , \quad \xi_a^a = e^{2\pi i} = 1$$

Für die nächsten Schritte brauchen wir die Gauß-Klammer $\lfloor x \rfloor$, welche die größte ganze Zahl kleiner als oder gleich x bezeichnet, und die Nachkommaanteilsfunktion $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Mit Hilfe dieser beiden Definitionen gelangt man auf den Satz von Popoviciu.

Satz 5.1 (Satz von Popoviciu): Für teilerfremde a und b gilt

$$p_{\{a,b\}}(n) = \frac{n}{ab} - \{\frac{b^{-1}n}{a}\} - \{\frac{a^{-1}n}{b}\} + 1$$

wobei $b^{-1}b \equiv 1 \bmod a$ und $a^{-1}a \equiv 1 \bmod b$. Um den Ausdruck $b^{-1}b \equiv 1 \bmod a$ zu erklären muss man in dem Ring $\mathbb{Z}_a$ arbeiten und die Gleichung $b^{-1} \equiv b$ auflösen, indem man die Gleichung $b^{-1} = \frac{la+1}{b}$ ausrechnet,wobei $l \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $b^{-1} \in \mathbb{N}$.

Beispiel1: $a = 5$, $b = 3$: $b^{-1} = \frac{5+1}{3} = 2$, $3^{-1} \equiv 2 \bmod 5$

Beispiel2: $a = 7$, $b = 3$: $b^{-1} = \frac{2\cdot 7+1}{3} = 5$, $3^{-1} \equiv 5 \bmod 7$

6 Der Satz von Sylvester

Lemma 6: Falls a und b teilerfremde positive ganze Zahlen sind und $n \in [1, ab-1]$ kein Vielfaches von a oder b ist, gilt

$$p_{\{a,b\}}(n) + p_{\{a,b\}}(ab-n) = 1$$

Dieses Lemma benötigen wir um die zwei für dieses Kapitel wichtigen Sätze zu beweisen.

Satz 6.1: Für teilerfremde natürliche Zahlen a und b gilt:

$$g(a,b) = ab - a - b$$

Beweis: i) z.z. $p_{\{a,b\}}(ab-a-b)=0$

Geg.: $p_{\{a,b\}}(a+b)=1 \qquad p_{\{a,b\}}(n)+p_{\{a,b\}}(ab-n)=1$

Wähle $n=a+b \quad \Rightarrow \quad p_{\{a,b\}}(a+b)+p_{\{a,b\}}(ab-a-b)=1 \quad \Rightarrow \quad p_{\{a,b\}}(ab-a-b)=0$

ii) z.z $p_{\{a,b\}}(n)>0$ falls $n>ab-a-b$

$$\forall k\in\mathbb{Z}:k\geq 1 \qquad \forall m\in\mathbb{Z}:\left\{\frac{m}{a}\right\}\leq 1-\frac{1}{a}$$

$$p_{\{a,b\}}(ab-a-b+k)\overset{5.1}{=}\frac{ab-a-b+k}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}(ab-a-b+k)}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}(ab-a-b+k)}{b}\right\}+1$$

$$\geq\frac{ab-a-b+k}{ab}-\left(1-\frac{1}{a}\right)-\left(1-\frac{1}{b}\right)+1=\frac{k}{ab}>0$$

Satz 6.2: Für teilerfremde a und b gilt, dass genau die Hälfte der ganzen Zahlen zwischen 1 und $(a-1)(b-1)$ darstellbar sind.
Beweis: Es gibt zwischen 1 und ab-1 genau

$$(ab-1)-(b-1)-(a-1)=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$$

Zahlen, die weder durch a noch durch b teilbar sind. Die Ungleichung $p_{\{a,b\}}(n)>0$und Lemma 6 besagen, dass zwischen 1 und $ab-1$ genau eine der beiden Zahlen n oder $ab-n$ darstellbar ist, wenn n kein Vielfaches von a oder b ist. Daher ist die Anzahl der nicht darstellbaren ganzen Zahlen genau $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

7 Drei und mehr Münzen

Bei mehr Münzen wenden wir den gleichen Weg an, den wir für die Rechnung mit zwei Münzen gebraucht haben.

$$p_A(n):=\#\{(m_1,...,m_d)\in\mathbb{Z}^d: \text{ alle } m_j\geq 0 \text{ und } m_1a_1+...+m_da_d=n\}$$

Nun bilden wir die Erzeugendenfunktion

$$\sum_{n\geq 0}p_A(n)z^n=\left(\frac{1}{1-z^{a_1}}\right)\left(\frac{1}{1-z^{a_2}}\right)...\left(\frac{1}{1-z^{a_d}}\right)$$

jetzt nehmen wir den Absolutkoeffizienten

$$p_A(n)=const\left(\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})...(1-z^{a_d})z^n}\right)$$

und gelangen durch Partialbruchzerlegung und der Fourier-Dedekind-Summe zu der Gleichung

$$p_A(n)=-B_1+B_2-...+(-1)^dB_d+s_{-n}(a_2,a_3,...,a_d;a_1)+s_{-n}(a_1,a_3,...,a_d;a_2)+...+s_{-n}(a_1,a_2,...,a_{d-1};a_d)$$

Dabei sind $B_1,B_2,...,B_d$ die Partialbruchkoeffizienten.

Die Fourier-Dedekind-Summe ist definiert als

$$s_n(a_1,a_2,...,a_m;b):=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\xi_b^{kn}}{(1-\xi_b^{ka_1})(1-\xi_b^{ka_2})...(1-\xi_b^{ka_m})}$$

Beispiel:

$$p_{\{a,b,c\}}(n)=\frac{n^2}{2abc}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})(1-\xi_a^{kc})\xi_a^{kn}}$$

$$+\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{1}{(1-\xi_b^{kc})(1-\xi_b^{ka})\xi_b^{kn}}+\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c-1}\frac{1}{(1-\xi_c^{ka})(1-\xi_c^{kb})\xi_c^{kn}}$$