

Das Kontinuum diskret berechnen

Kapitel 2.1 - 2.3

Eine galerie diskreter Volumina

Hannah Lantermann

5. Mai 2009

2.1 DIE SPRACHE DER POLYTOPE

Ein Polytop in Dimension 1 ist ein abgeschlossenes Intervall; die Anzahl der Gitterpunkte in $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ ist gleich $\lfloor \frac{c}{d} \rfloor - \lfloor \frac{a-1}{b} \rfloor$.

DEFINITIONEN:

Konvexes Polytop:

Konvexe Hülle endlich vieler Punkte in \mathbb{R}^d . Kleinste konvexe Menge, die diese Punkte enthält. Ein Polytop ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^d .

V-Beschreibung:

Beschreibung eines Polytops durch seine Eckpunkte (englisch: vertex = Eckpunkt), z.B. $\mathcal{P} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n : \text{alle } \lambda_k \geq 0 \text{ und } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1\}$
Schreibweise:

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

H-Beschreibung:

Polytope können auch durch ihre Halbräume und Hyperebenen beschrieben werden. Die H-Beschreibung ist äquivalent zur V-Beschreibung.

Dimension eines Polytops:

Dimension des affinen Raums

$$\text{span } \mathcal{P} := \{x + \lambda(y - x) : x, y \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

der von \mathcal{P} aufgespannt wird.

Hyperebene:

Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums, der eine Dimension weniger als der Vektorraum hat. $H = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = b\}$

Halbraum:

Ein Halbraum ist eine durch eine Hyperebene begrenzte Teilmenge eines Raumes beliebiger Dimension. Wenn die Hyperebene selbst im Halbraum enthalten ist, heißt dieser abgeschlossen, sonst offen. Halbraum, da die Hyperebene den Raum in zwei Teile unterteilt.

Unterstützende Hyperebene von \mathcal{P} :

Eine Hyperebene, so dass \mathcal{P} vollständig auf einer Seite von H liegt, d.h. $\mathcal{P} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x \leq b\}$ oder $\mathcal{P} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x \geq b\}$.

Seiten:

Eine Menge der Form $\mathcal{P} \cap H$, H ist eine unterstützende Hyperebene von \mathcal{P} .

Facetten:

$(d - 1)$ -dimensionalen Seiten

Kanten:

1-dimensionalen Seiten

Ecken:

0-dimensionalen Seiten

Simplex:

Konvexes Polytop mit $d + 1$ Ecken. Jedes 1-dimensionale konvexe Polytop ist ein 1-Simplex (Geradenabschnitt). Ein 2-dimensionaler Simplex ist ein Dreieck, ein 3-dimensionales ein Tetraeder.

Ein konvexes Polytop heißt ganzzahlig, wenn alle seine Ecken ganzzahlige Koordinaten haben, \mathcal{P} heißt rational, wenn alle seine Ecken rationale Koordinaten haben.

KAPITEL 2.2 DER EINHEITSWÜRFEL

Die V-Beschreibung des Einheitswürfels \square wird durch die Menge der 2^d Ecken (x_1, x_2, \dots, x_d) : alle $x_k = 0$ oder 1 gegeben. Die H-Beschreibung ist

$$\square = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_k \leq 1 \text{ für alle } k = 1, 2, \dots, d\}$$

Es gibt die $2d$ begrenzenden Hyperebenen $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, ..., $x_d = 0$, $x_d = 1$.

Berechnung des diskreten Volumens einer beliebigen ganzzahligen Streckung des Einheitswürfels: Wir suchen die Anzahl der ganzzahligen Punkte $t\square \cap \mathbb{Z}^d$ für alle $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $t\mathcal{P}$ bezeichnet das gestreckte Polytop:

$$\{(tx_1, tx_2, \dots, tx_d) : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathcal{P}\}$$

für ein beliebiges Polytop \mathcal{P} .

Was ist das diskrete Volumen des Einheitswürfels?

Wir strecken mit der ganzen Zahl t , und zählen:

$$\#(t\Box \cap \mathbb{Z}^d) = \#[0, t]^d \cap \mathbb{Z}^d = (t+1)^d$$

Bezeichnung für den Gitterpunktzähler für die t -te Streckung von $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ (diskretes Volumen von \mathcal{P}):

$$L_{\mathcal{P}}(t) := \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$$

Man kann sich auch vorstellen, dass man \mathcal{P} fest lässt und das Gitter schrumpft:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \#(\mathcal{P} \cap \frac{1}{t}\mathbb{Z}^d).$$

$L_{\mathcal{P}}(t) = (t+1)^d$ ist ein Polynom in der ganzzahligen Variablen t . Die Koeffizienten dieses Polynoms sind die **Binomialkoeffizienten** $\binom{d}{k}$, denn $(t+1)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} t^k$

Berechnung des Inneren des Würfels:

$$L_{\Box^\circ}(t) = \#(t\Box^\circ \cap \mathbb{Z}^d) = \#((0, t)^d \cap \mathbb{Z}^d) = (t-1)^d.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung eines beliebigen Polytops \mathcal{P} ist die Erzeugendenfunktion von $L_{\mathcal{P}}$

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) := 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(t) z^t.$$

Diese Erzeugendenfunktion wird auch die Ehrhart-Reihe von \mathcal{P} genannt. Hier nimmt die Ehrhart-Reihe von $\mathcal{P} = \Box$ eine besondere Form an, deshalb definieren wir die Euler-Zahl $A(d, k)$ durch

$$\sum_{j \geq 0} j^d z^j = \frac{\sum_{k=0}^d A(d, k) z^k}{(1-z)^{d+1}}$$

Eigenschaften der Euler-Zahlen:

$$A(d, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d+1}{j} (k-j)^d$$

für alle $1 \leq k \leq d$. Mit dieser Definition können wir nun die Ehrhart-Reihe von \Box mithilfe der Euler-Zahlen ausdrücken:

$$Ehr_{\Box}(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} (t+1)^d z^t = \sum_{t \geq 0} (t+1)^d z^t = \frac{1}{z} \sum_{t \geq 1} t^d z^t = \frac{\sum_{k=1}^d A(d, k) z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}$$

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1 Sei \Box der d -Einheitswürfel:

(a) Der Gitterpunktzähler von \square ist das Polynom

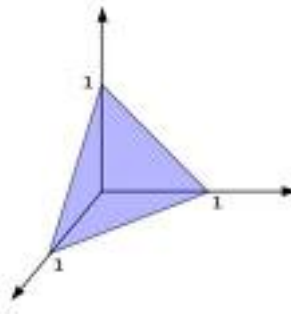
$$L_{\square}(t) = (t + 1)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} t^k.$$

(b) Dieser ergibt, ausgewertet bei negativen ganzen Zahlen, die Relation

$$(-1)^d L_{\square}(-t) = L_{\square^{\circ}}(t).$$

(c) Die Ehrhart-Reihe von \square ist $\text{Ehr}_{\square}(z) = \frac{1}{z} \sum_{t \geq 1} t^d z^t = \frac{\sum_{k=1}^d A(d,k) z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}$

2.3 DER STANDARDSIMPLEX



Der Standardsimplex Δ in Dimension d ist die konvexe Hülle der $d + 1$ Punkte e_1, e_2, \dots, e_d und 0 ; dabei ist e_j der Einheitsvektor $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ mit einer 1 an der j -ten Stelle und 0 der Koordinatenursprung. Oben sieht man eine Abbildung für $d=3$. Δ kann auch durch seine H-Beschreibung dargestellt werden:

$$\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 + x_2 + \dots + x_d \leq 1 \text{ und alle } x_k \geq 0\}$$

Die Streckung des Standardsimplex $t \Delta$ wird durch

$$t \Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 + x_2 + \dots + x_d \leq t \text{ und alle } x_k \geq 0\}$$

gegeben. Um das diskrete Volumen von Δ zu berechnen wenden wir die Methode aus Kapitel 1 an, allerdings war die Zählerfunktion $p_A(t)$ durch Gleichungen definiert, der Standardsimplex ist durch Ungleichungen definiert. Wir versuchen alle ganzzahligen Lösungen $(m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ zu

$$m_1 + m_2 + \dots + m_d \leq t$$

zu finden. Wir führen eine Schlupfvariable $m_{d+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ ein um diese Ungleichung in eine Gleichung mit $d+1$ Variablen zu verwandeln. Die Schlupfvariable nimmt den Unterschied von linker und rechter Seite auf. Also:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{d+1} = t$$

Nun können wir die Methode aus Kapitel 1 anwenden:

$$\begin{aligned} L_{\Delta}(t) &= \#(t\Delta \cap \mathbb{Z}^d) \\ &= p_{\{1, \dots, 1\}}(t) \\ &= \text{const} \left(\left(\sum_{m_1 \geq 0} z^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2 \geq 0} z^{m_2} \right) \dots \left(\sum_{m_{d+1} \geq 0} z^{m_{d+1}} \right) z^{-t} \right) \\ &= \text{const} \left(\underbrace{\frac{1}{1-z} \dots \frac{1}{1-z}}_{(d+1)\text{-mal}} \cdot \frac{1}{z^t} \right) \\ &= \text{const} \left(\frac{1}{(1-z)^{d+1} z^t} \right) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Kapitel 1 benötigen wir nicht die Partialbruchzerlegung sondern die allgemeine binomische Reihe

$$\frac{1}{(1-z)^{d+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{d+k}{d} z^k$$

(Definition der Ehrhart-Reihe von Δ) für $d \geq 0$.

Die Gleichung der konstanten Terme erfordert den Koeffizienten von z^t in der binomischen Reihe zu finden, dieser ist $\binom{d+t}{d}$. Das diskrete Volumen von Δ ist durch $L_{\Delta}(t) = \binom{d+t}{d}$ gegeben, was ein Polynom vom Grad d in der ganzzahligen Variablen t ist.

Wir berechnen das Innere Δ° des d -Standardsimplex. Wir führen diesmal die Schlupfvariable $m_{d+1} \geq 0$ ein, so dass eine strikte Ungleichung erzwungen wird:

$$\begin{aligned} L_{\Delta^\circ}(t) &= \#\{(m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d : m_1 + m_2 + \dots + m_d \geq t\} \\ &= \#\{(m_1, m_2, \dots, m_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1} : m_1 + m_2 + \dots + m_{d+1} = t\} . \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
L_{\Delta^\circ}(t) &= \text{const} \left(\left(\sum_{m_1 > 0} z^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2 > 0} z^{m_2} \right) \dots \left(\sum_{m_{d+1} > 0} z^{m_{d+1}} \right) z^{-t} \right) \\
&= \text{const} \left(\frac{z}{(1-z)^{d+1}} z^{-t} \right) \\
&= \text{const} \left(z^{d+1-1} \sum_{k \geq 0} \binom{d+k}{d} z^k \right) \\
&= \binom{t-1}{d}
\end{aligned}$$

Satz 2 Satz: Sei Δ der d -Standardsimplex.

- (a) Der Gitterpunktzähler von Δ ist das Polynom $L_\Delta(t) = \binom{d+1}{d}$.
- (b) Seine Auswertung bei negativen ganzen Zahlen ergibt $(-1)^d L_\Delta(-t) = L_{\Delta^\circ}(t)$.
- (c) Die Ehrhart-Reihe von Δ ist $\text{Ehr}_\Delta(z) = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$.