

Galerie diskreter Volumina III

Proseminar: Das Kontinuum diskret berechnen

Matthias Bausch

Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Rationale Polygone	2
2.1	Triangulierung und neue Problemstellung	2
2.2	Volumina eines rechtwinkligen Dreiecks	3
2.3	Satz über das Quasipolynom	4
3	Euler'sche Erzeugendenfunktion für rationale Polytope	5
3.1	Polytop als Durchschnitt von Halbräumen	5
3.2	Volumen und Ehrhart-Reihe eines beliebigen rationalen Polytops	5

1 Einleitung

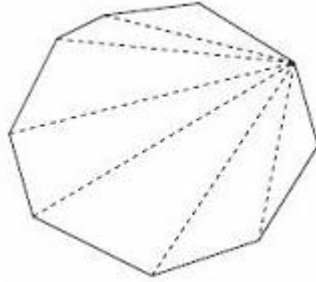
In diesem Abschnitt geht es um die Anzahl der Gitterpunkte in einem beliebigen rationalen Polygon, auch Vieleck genannt. Dabei handelt es sich um ein konvexes Polytop der Dimension 2, also die kleinste konvexe Menge (konvexe Hülle) endlich vieler Punkte a_1 bzw. Durchschnitt endlich vieler Halbräume (spätere Definition).

Bekannte Beispiele sind Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke.

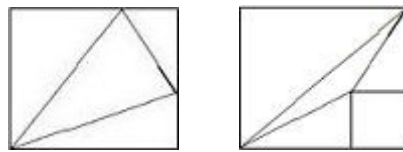
2 Rationale Polygone

2.1 Triangulierung und neue Problemstellung

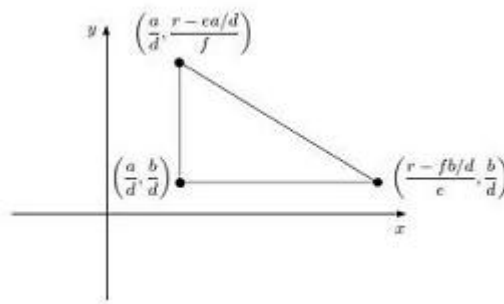
Da das Zählen von Gitterpunkten in rationalen Vielecken sehr komplex und schwierig ist, vereinfachen wir unser Problem, indem wir das Polygon triangulieren, d.h. in Dreiecke aufteilen.



Jedoch sollte man äußerste Rücksicht daraufnehmen, dass man die Gitterpunkte auf den Geradenabschnitten (in denen sich die Dreiecke) treffen, nicht mehrfach zählt. Jedoch liegt unser Augenmerk nicht auf den Geradenabschnitten, sondern auf rationalen Dreiecken. Um uns die Situation noch weiter zu vereinfachen, betten wir unser Dreieck in ein Rechteck ein. Um nun die Gitterpunkte des Dreiecks zu zählen, bestimmen wir erst die Anzahl der Punkte in einem Rechteck mit achsenparallelen Seiten und ziehen davon die Gitterpunkte der drei rechtwinkligen Dreiecke ab, von denen jedes zwei achsenparallele Seiten hat.



Da Rechtecke sehr einfach im Umgang mit Zählen sind, konzentrieren wir uns, eine Formel für ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei achsenparallelen Seiten zu finden. Sei nun solch ein Dreieck T gegeben wie in der nächsten Abbildung:



Herleitung der Koordinaten mittels Geradengleichung:

$$m = \frac{\frac{b}{d} - \frac{r-ca/d}{f}}{\frac{r-fb/d}{e} - \frac{a}{d}} = \dots = -\frac{e}{f} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{e}{f} * x + b$$

Durch Einsetzen eines Punktes, z.B. $(\frac{a}{d}, \frac{r-ca/d}{f})$ in die Gleichung ergibt sich:

$$b = \frac{r}{f} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{e}{f}x + \frac{r}{f} \quad \text{bzw.} \quad \frac{e}{f}x + y = \frac{r}{f}$$

Somit ist dieses Dreieck T eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , welche aus allen Punkten (x, y) besteht, für die

$$x \geq \frac{a}{d}, y \geq \frac{b}{d}, ex + fy \leq r$$

für ganze Zahlen a, b, d, e, f und r gilt. Da die Anzahl der Gitterpunkte invariant unter Translationen und Spiegelungen ist, dürfen wir $a, b, d, e, f, r \geq 0$ annehmen.

Also ist unser Dreieck T gegeben durch:

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{a}{d}, y \geq \frac{b}{d}, ex + fy \leq r \right\}$$

2.2 Volumina eines rechtwinkligen Dreiecks

Um eine Formel für

$$L_T(t) = \# \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, em + fn \leq tr \right\}$$

herzuleiten, benutzen wir die Methoden aus den Kapiteln zuvor.

1.

$$\begin{aligned} L_T(t) &= \# \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, em + fn \leq tr \right\} \\ &= \# \left\{ (m, n, s) \in \mathbb{Z}^3 : m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, s \geq 0, em + fn + s = tr \right\} \end{aligned}$$

Nun formulieren wir unsere Erzeugendenfunktion (2.) und benutzen dabei die „geometrische Reihe“ (3.):

$$\begin{aligned} \sum_{t=1} L_T(t) z^{tr} &= \left(\sum_{m \geq \frac{ta}{d}} z^{em} \right) \left(\sum_{n \geq \frac{tb}{d}} z^{fn} \right) \left(\sum_{s \geq 0} z^s \right) \\ &= \left(\sum_{m \geq \lceil \frac{ta}{d} \rceil} z^{em} \right) \left(\sum_{n \geq \lceil \frac{tb}{d} \rceil} z^{fn} \right) \left(\sum_{s \geq 0} z^s \right) \\ &= \frac{z^{\lceil \frac{ta}{d} \rceil e} z^{\lceil \frac{tb}{d} \rceil f}}{1 - z^e} \frac{1}{1 - z^f} \frac{1}{1 - z} = \frac{z^{u+v}}{(1 - z^e)(1 - z^f)(1 - z)} \end{aligned}$$

wobei $u := \lceil \frac{ta}{d} \rceil e$ und $v := \lceil \frac{tb}{d} \rceil f$.

Nun dividieren wir beide Seite mit z^{tr} , verwenden die Partialbruchzerlegung (4.) und werten die Funktion bei $z = 0$ (5.) aus (wir benutzen bei der Partialbruchzerlegung die Annahme, dass e und

f teilerfremd sind). Somit gilt:

$$\begin{aligned}
L_T(t) &= \text{const} \left(\frac{1}{(1-z^e)(1-z^f)(1-z)z^{tr-u-v}} \right) \\
&= \text{const} \left(\sum_{j=1}^{e-1} \frac{A_j}{z-\xi_e^j} + \sum_{j=1}^{f-1} \frac{B_j}{z-\xi_f^j} + \sum_{k=1}^3 \frac{C_k}{(z-1)^k} + \sum_{k=1}^{tr-u-v} \frac{D_k}{z^k} \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{e-1} \frac{A_j}{\xi_e^j} - \sum_{j=1}^{f-1} \frac{B_j}{\xi_f^j} - C_1 + C_2 - C_3
\end{aligned}$$

Wenn wir alle berechneten Koeffizienten in die obere Gleichung einsetzen, ergibt sich folgende Formel für den Gitterpunktzähler:

Satz: Für das gegebene rechtwinklige Dreieck (mit e und f teilerfremd) gilt

$$\begin{aligned}
L_T(t) &= \frac{1}{2ef}(tr-u-v)^2 + \frac{1}{2}(tr-u-v)\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{ef}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12}\left(\frac{e}{f} + \frac{f}{e} + \frac{1}{ef}\right) + \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{e-1} \frac{\xi_e^{j(v-tr)}}{(1-\xi_e^{jf})(1-\xi_e^j)} + \frac{1}{f} \sum_{l=1}^{f-1} \frac{\xi_f^{l(u-tr)}}{(1-\xi_f^{le})(1-\xi_f^l)}
\end{aligned}$$

Konkretes Beispiel:

Sei T das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 1)$, $(2, 1)$ und $(1, 2)$. Außerdem betrachten wir den Fall $t = 1$. Somit folgt: $a = b = d = e = f = 1$ und $r = 3 \rightarrow$

$$\begin{aligned}
L_T(t) &= \frac{1}{2}(3-1-1)^2 + \frac{1}{2}(3-1-1)(1+1+1) + \frac{1}{4}(1+1+1) + \frac{1}{12}(1+1+1) + 0 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{12} = 3
\end{aligned}$$

Durch einfaches Nachzählen im Koordinatensystem kommt man auf die gleiche Anzahl Punkte.

2.3 Satz über das Quasipolynom

Wenn wir die Formel für L_T als Funktion von t untersuchen, erkennen wir, dass L_T (abgesehen von den beiden Summen und u bzw. v) ein quadratisches Polynom ist. In den Summen kommt t im Exponenten von ξ_e bzw. ξ_f vor, was man auf periodische Funktionen zurückführen kann. Auch u und v sind Funktionen von t . Diese können jedoch leicht in die periodische Nachkommanteilsfunktion übergeführt werden. Also ist $L_T(t)$ ein quadratisches Polynom, dessen Koeffizienten periodische Funktionen in t sind. Dies führt zum Begriff des **Quasipolynoms**, welches durch

$$Q(t) = c_n(t)t^n + \dots + c_1(t)t + c_0(t)$$

definiert ist, wobei die c_0, \dots, c_n periodische Funktionen von t sind. Mithilfe dieser Definition lässt sich folgender Satz formulieren.

Satz über das Quasipolynom: Sei P ein beliebiges rationales Polygon. Dann ist $L_P(t)$ ein Quasipolynom vom Grad 2. Sein Leitkoeffizient (c_n) ist die Fläche von P (und damit eine Konstante).

Beweis:

Wir können uns beim Beweis dieses Satzes auf rechtwinklige Dreiecke und Rechtecke (jeweils achsenparallel) beschränken, da jedes rationale Polygon aus Dreiecken besteht, welche in ein solches

Rechteck eingebettet und von rechtwinkligen Dreiecken umrandet sind (siehe Seite 2).

Dass $L_P(t)$ von einem rechtwinkligen Dreieck ein Quasipolynom vom Grad 2 ist, sehen wir leicht im vorigen Satz. Nun zur Fläche:

Sei OBdA $a = b = 0 \rightarrow u = v = 0 \rightarrow c_n = \frac{r^2}{2ef}$

Wir erkennen leicht, dass dies die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit Grundseite $\frac{r}{e}$ und Höhe $\frac{r}{f}$ ist. Der Gitterpunktzähler eines Rechtecks mit den Seiten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ist gegeben durch:

$$L_P(t) = \lceil \frac{ta}{b} \rceil \lceil \frac{tc}{d} \rceil = (\frac{ta}{b} - \{ \frac{ta}{b} \} + 1)(\frac{tc}{d} - \{ \frac{tc}{d} \} + 1) = t^2 \frac{ac}{bd} + \dots$$

Wir erkennen: $L_P(t)$ ist ein Quasipolynom vom Grad 2 und der Leitkoeffizient ist die Fläche des Rechtecks. Damit folgt die Behauptung des Satzes. \square

3 Euler'sche Erzeugendenfunktion für rationale Polytope

3.1 Polytop als Durchschnitt von Halbräumen

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für eine Erzeugendenfunktion des Gitterpunktzählers eines beliebigen rationalen Polytops. Sei nun P solch ein Polytop, welches wir als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen verstehen („H-Beschreibung“, siehe Vortrag Hannah Lantermann).

Da das diskrete Volumen invariant unter Translationen bleibt und wir uns wieder einmal einer Schlupfvariablen bedienen, können wir jedes rationale Polytop P als

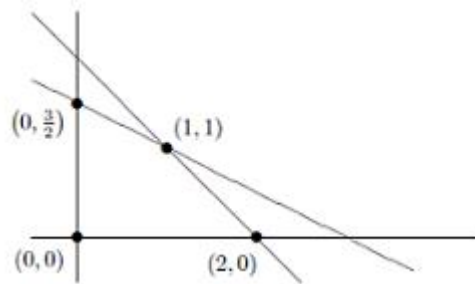
$$P = \{x \in \mathbb{R}^d, x \geq 0 : Ax = b\}$$

für eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{md}$ und einem ganzzahligen Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ schreiben. Also ist der Gitterpunktzähler die Zählfunktion

$$L_P(t) = \# \{x \in \mathbb{Z}^d, x \geq 0 : Ax = tb\}$$

3.2 Volumen und Ehrhart-Reihe eines beliebigen rationalen Polytops

Beispiel:



$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 2\}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} L_T(t) &= \# \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 3t, x_1 + x_2 \leq 2t\} \\ &= \# \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 3t, x_1 + x_2 + x_4 = 2t\} \\ &= \# \left\{ x \in \mathbb{Z}^4 : x \geq 0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Nun entwickeln wir wieder unsere Erzeugendenfunktion. Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln haben wir jedoch jetzt ein System linearer Beschränkungen (d.h. mehrere Gleichung). Deswegen benötigen wir mehr als eine Variable:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1} L_P(t) z_1^{3t} z_2^{2t} &= \left(\sum_{n_1 \geq 0} (z_1 z_2)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2 \geq 0} (z_1^2 z_2)^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3 \geq 0} z_1^{n_3} \right) \left(\sum_{n_4 \geq 0} z_2^{n_4} \right) \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_4 \geq 0} z_1^{n_1 + 2n_2 + n_3} z_2^{n_1 + n_2 + n_4} \\ &= \frac{1}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^2 z_2)(1 - z_1)(1 - z_2)} \end{aligned}$$

Wenn wir den konstanten Term (sowohl in z_1 als auch in z_2) berechnen, zählen wir die Lösungen des oberen Gleichungssystems, also alle Gitterpunkte in P :

$$L_P(t) = \text{const} \frac{1}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^2 z_2)(1 - z_1)(1 - z_2) z_1^{3t} z_2^{2t}}$$

Allgemein bedeutet dies für $z = (z_1, \dots, z_m)$ und $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_d$ (Spalten von A):

Satz (Euler'sche Erzeugendenfunktion): Das Ehrhart-Quasipolynom von $P = \{x \in \mathbb{R}^d, x \geq 0 : Ax = b\}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$L_P(t) = \text{const} \left(\frac{1}{(1 - z^{\mathbf{c}_1}) \dots (1 - z^{\mathbf{c}_d}) z^{tb}} \right)$$

Zum Schluss formulieren wir die Ehrhart-Reihe dieses Polynoms:

Korollar: Die Ehrhart-Reihe von P kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{Ehr}_P(x) = \text{const} \left(\frac{1}{(1 - z^{\mathbf{c}_1}) \dots (1 - z^{\mathbf{c}_d}) \left(1 - \frac{x}{z^b}\right)} \right)$$