

Gitterpunkte in Polytopen zählen: Ehrhart-Theorie

Theresa Bickeböller

Sommersemester 2009

1 Triangulierungen von Polytopen

Zunächst werden wir uns mit der Triangulierung von Polytopen befassen und werden im nächsten Abschnitt noch zu Triangulierungen von Kegeln kommen. Nun zur Definition einer Triangulierung:

Definition 1.1:

Eine Triangulierung eines konvexen d -Polytops \mathcal{P} ist eine endliche Sammlung T von d -Simplizes mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{P} = \bigcup_{\Delta \in T} \Delta$

ii) Für beliebige $\Delta_1, \Delta_2 \in T$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ eine gemeinsame Seite von Δ_1 und Δ_2

2 Spitze Kegel

Zuerst zur Definition des spitzen Kegels:

Definition 2.1:

Ein spitzer Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Menge folgender Form:

$$K = \{v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0\}$$

Den Vektor v nennt man **Spitze** des Kegels \mathcal{K} und die w_k s nennt man **Erzeuger** von \mathcal{K}

Die Spitze $v \in \mathbb{R}^d$ und die Erzeuger $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{R}^d$ von \mathcal{K} sind so gewählt, dass es eine Hyperebene H gib, so dass gilt: $H \cap \mathcal{K} = \{v\}$.

Die **Dimension** von \mathcal{K} entspricht der Dimension des von \mathcal{K} aufgespannten affinen Raums. Ist der Kegel \mathcal{K} von der Dimension d , so nennt man ihn d -Kegel.

rationaler Kegel:

$v, w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{Q}^d$ In diesem Fall kann man $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{Z}^d$ wählen, indem man mit dem Hauptnenner multipliziert.

simplicialer d-Kegel:

Es gibt genau d Erzeuger $w_1, w_2, \dots, w_d \in \mathbb{R}^d$ und diese sind linear unabhängig.

Kegel lassen sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d \leq b\}$$

beschreiben, wobei $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$. Die dazugehörigen Hyperebenen sind von der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b\}.$$

Warum werden aber überhaupt Kegel eingeführt? Der Grund hierfür ist, dass man „**Kegel über Polytopen**“ konstruieren kann was sich später als sehr nützlich erweisen wird. Dies funktioniert wie folgt:

Gegeben sei ein Polytop $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ mit Ecken v_1, v_2, \dots, v_n . Nun wollen wir die Ecken in den \mathbb{R}^{d+1} heben. Dazu fügen wir 1 als letzte Koordinate von v_1, v_2, \dots, v_n hinzu. Somit erhalten wir die Erzeuger:

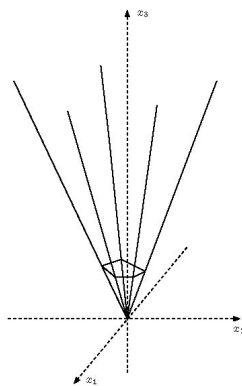
$$w_1 = (v_1, 1), w_2 = (v_2, 1), \dots, w_n = (v_n, 1)$$

Den **Kegel über \mathcal{P}** definieren wir als

$$\text{cone}(\mathcal{P}) = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

mit dem Koordinatenursprung als Spitze.

Um unser Ausgangspolytop \mathcal{P} zurückzugewinnen, schneiden wir $\text{cone}(\mathcal{P})$ mit der Hyperebene $x_{d+1} = 1$.



$H = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = b\}$ sei eine **unterstützende Hyperebene** des spitzen d -Kegels \mathcal{K} . Dann liegt \mathcal{K} vollständig auf einer Seite von H . D.h. $\mathcal{K} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x \leq b\}$ oder $\mathcal{K} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x \geq b\}$.

Seite von \mathcal{K} : Eine Menge der Form $\mathcal{K} \cap H$. Hierbei ist H eine unterstützende Hyperebene von \mathcal{K} .

Facetten: $(d - 1)$ -dimensionale Seiten

Kanten: 1-dimensionale Seiten.

Die Spitze des Kegels \mathcal{K} ist die einzige 0-dimensionale Seite.

Nun zur Triangulierung von Kegeln:

Definition 2.3:

Eine Triangulierung eines d -Kegels \mathcal{K} ist eine Menge T simplizialer d -Kegel mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{K} = \bigcup_{S \in T} S$

ii) Für beliebige $S_1, S_2 \in T$ ist $S_1 \cap S_2$ eine gemeinsame Seite von S_1 und S_2

3 Gitterpunkttransformation

Die Erzeugendenfunktion σ_S mit

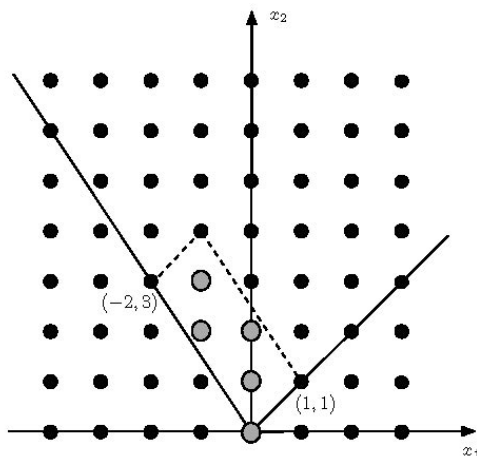
$$\sigma_S(z) = \sigma_S(z_1, z_2, \dots, z_d) := \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^d} z^m$$

listet alle Gitterpunkte einer Menge $S \subset \mathbb{R}^d$ als Summe von eingliedrigen Polynomen (genannt Monomen) auf. Hierbei gilt: $z^m := z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \dots \cdot z_d^{m_d}$. Die Exponenten (m_i) geben jeweils die Koordinaten eines Gitterpunkts an.

σ_S nennt man **Gitterpunkttransformation** von S .

Beispiel 3.1:

Sei $\mathcal{K} = \{\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(-2, 3) : \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $w_1 = (1, 1), w_2 = (-2, 3)$ und der Spitze im Koordinatenursprung.



$$\Pi := \{\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(-2, 3) : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist das sogenannte **Fundamentalparallelogramm**.

Um die Gitterpunkttransformation zu erhalten verschieben wir Π um nichtnegative ganzzahlige Linearkombinationen der Erzeuger w_1, w_2 . Durch die Parallelverschiebungen von Π lässt

sich ganz \mathcal{K} abdecken.

Nun wollen wir alle Ecken der Parallelverschiebung von Π auflisten, indem wir die geometrische Reihe zur Hilfe nehmen:

$$\begin{aligned} \sum_{m=j(1,1)+k(-2,3)} z^m &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} z^{j(1,1)+k(-2,3)} = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} z^{j(1,1)} \cdot z^{k(-2,3)} = \sum_{j \geq 0} z^{j(1,1)} \cdot \sum_{k \geq 0} z^{k(-2,3)} \\ &= \sum_{j \geq 0} (z_1^1 \cdot z_2^1)^j \cdot \sum_{k \geq 0} (z_1^{-2} \cdot z_2^3)^k = \frac{1}{(1 - z_1 z_2)} \cdot \frac{1}{(1 - z_1^{-2} z_2^3)} = \frac{1}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^{-2} z_2^3)} \end{aligned}$$

Mit den Gitterpunkten $(m, n) \in \Pi$ erzeugen wir eine Teilmenge des \mathbb{Z}^2 . Dazu addieren wir zu (m, n) nichtnegative ganzzahlige Linearkombinationen der Erzeuger w_1, w_2 und erhalten folgende Teilmenge:

$$\mathcal{L}_{(m,n)} = \{(m, n) + j(1, 1) + k(-2, 3) : j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

$\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^2$ ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen $\mathcal{L}_{(m,n)}$. (m, n) durchläuft

$$\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (-1, 2), (-1, 3)\}.$$

Es ergibt sich die Gitterpunkttransformation

$$\sigma_{\mathcal{K}}(z) = (1 + z_2 + z_2^2 + z_1^{-1} z_2^2 + z_1^{-1} z_2^3) \sum_{m=j(1,1)+k(-2,3)} z^m = \frac{1 + z_2 + z_2^2 + z_1^{-1} z_2^2 + z_1^{-1} z_2^3}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^{-2} z_2^3)}$$

Es ist die Kachelung des Kegels, die uns zu der Gitterpunkttransformation des folgenden Satzes führt:

Satz 3.3:

Sei $\mathcal{K} := \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_d w_d : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \geq 0\}$ ein simplizialer d-Kegel, wobei $w_1, w_2, \dots, w_d \in \mathbb{Z}^d$. Dann ist für $v \in \mathbb{R}^d$ die Gitterpunkttransformation $\sigma_{v+\mathcal{K}}$ des verschobenen Kegels $v + \mathcal{K}$ gerade die rationale Funktion

$$\sigma_{v+\mathcal{K}}(z) = \frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{(1 - z^{w_1})(1 - z^{w_2}) \dots (1 - z^{w_d})}$$

wobei Π das halboffene Parallelepiped

$$\Pi := \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_d w_d : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d < 1\}$$

ist.

4 Der Satz von Ehrhart

Nun kommen wir zu dem grundlegenden Satz über die Anzahl der Gitterpunkte in einem ganzzahligen konvexen Polytop.

Satz von Ehrhart 4.1:

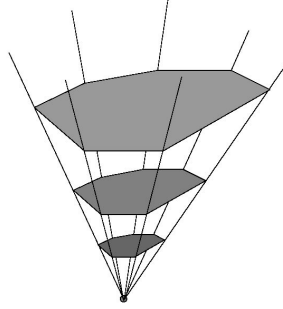
Ist \mathcal{P} ein ganzzahliges konvexes d-Polytop, so ist $L_{\mathcal{P}}(t)$ ein Polynom in t vom Grad d.

Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir noch ein paar Hilfsmittel:

Wollen wir etwas über die Anzahl von Gitterpunkten erfahren, so berechnen wir σ_S für $z = (1, 1, \dots, 1)$:

$$\sigma_{(S)}(1, 1, \dots, 1) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^d} 1^m = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^d} 1 = \#(S \cap \mathbb{Z}^d)$$

Wir bilden jetzt wieder den Kegel $\text{cone}(\mathcal{P})$ und gehen dazu so vor, wie in Abschnitt 2. Schneiden wir $\text{cone}(\mathcal{P})$ mit der Hyperebene $x_{d+1} = 1$ erhalten wir wieder unser ursprüngliches Polytop. Aber wir können noch mehr zurückerhalten, indem wir nämlich $\text{cone}(\mathcal{P})$ mit der Hyperebene $x_{d+1} = 2$ schneiden, erhalten wir eine um 2 gestreckte Kopie von \mathcal{P} . Allgemein erhalten wir also $t\mathcal{P}$, wenn wir $\text{cone}(\mathcal{P})$ mit der Hyperebene $x_{d+1} = t$ schneiden.



Nun kommen wir zur Gitterpunkttransformation $\sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}$. Dazu sollten wir die unterschiedlichen Potenzen von z_{d+1} betrachten. Der Term mit z_{d+1}^0 entspricht dem Koordinatenursprung. Ein Term mit z_{d+1}^1 entspricht den Gitterpunkten in \mathcal{P} und Terme mit z_{d+1}^2 den Gitterpunkten in $2\mathcal{P}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}(z_1, z_2, \dots, z_{d+1}) &= \sum_{m \in \text{cone}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d} z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \dots \cdot z_{d+1}^{m_{d+1}} \\ &= 1 + \left(\sum_{m \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} z_1^{m_1} \cdot \dots \cdot z_d^{m_d} \right) z_{d+1}^1 + \left(\sum_{m \in 2\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} z_1^{m_1} \cdot \dots \cdot z_d^{m_d} \right) z_{d+1}^2 + \dots \\ &= 1 + \sigma_{\mathcal{P}}(z_1, \dots, z_d) z_{d+1}^1 + \sigma_{2\mathcal{P}}(z_1, \dots, z_d) z_{d+1}^2 + \dots = 1 + \sum_{t \geq 1} \sigma_{t\mathcal{P}}(z_1, \dots, z_d) z_{d+1}^t \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir noch weiter spezialisieren:

$$\sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}(1, \dots, 1, z_{d+1}) = 1 + \sum_{t \geq 1} \sigma_{t\mathcal{P}}(1, \dots, 1) z_{d+1}^t = 1 + \sum_{t \geq 1} \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) z_{d+1}^t$$

Zusammen mit dem Gitterpunktzähler folgt

$$\mathbf{Lemma 4.2:} \quad \sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}(1, \dots, 1, z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(t) z^t = \text{Ehr}_{\mathcal{P}}(z)$$

Noch ein weiteres Hilfsmittel benötigen wir für den Beweis:

Lemma 4.3: Falls

$$\sum_{t \geq 0} f(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

dann ist f ein Polynom vom Grad d genau dann, wenn g ein Polynom vom Grad höchstens d ist und $g(1) \neq 0$.

Beweis von Satz 4.1: Wir vereinfachen uns den Beweis insofern, dass wir den Satz für Simplizes beweisen. D.h. wir müssen zeigen:

$$Ehr_{\Delta}(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta}(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

gilt für ein Polytop g vom Grad höchstens d mit $g(1) \neq 0$ (Lemma 4.3). Zusätzlich wissen wir, dass $\sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}(1, \dots, 1, z) = Ehr_{\Delta}(z)$ ist.

Δ hat $d+1$ Ecken, woraus folgt, dass $\text{cone}(\Delta)$ ein simplizialer Kegel ist.

Satz 3.3 sagt uns jetzt

$$\sigma_{\text{cone}(\Delta)}(z_1, \dots, z_{d+1}) = \frac{\sigma_{\Pi}(z_1, \dots, z_{d+1})}{(1-z^{w_1}) \dots (1-z^{w_{d+1}})}$$

Π ist beschränkt, d.h. σ_{Π} ist ein Polynom.

Bleibt also noch zu zeigen, dass der Grad des Polynoms höchstens d ist. Unsere Behauptung lautet, dass der Grad von z_{d+1} von σ_{Π} höchstens d ist. Die x_{d+1} -Koordinate eines jeden Erzeugers ist gleich 1. Daraus folgt, dass die x_{d+1} -Koordinate eines Punktes in Π gleich $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d+1}$ mit $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} < 1$. Aber dann ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d+1} < d+1$. Es folgt, dass der z_{d+1} -Grad von σ_{Π} höchstens d ist.

Wir müssen noch zeigen, dass $\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1) \neq 0$ ist bei $z_{d+1} = 1$.

Wir erinnern uns daran, dass $\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1)$ gleich die Anzahl der Gitterpunkte in $\Pi \cap \mathbb{Z}^{d+1}$ war. Der Koordinatenursprung ist auf jeden Fall ein Gitterpunkt in Π . Es gilt demnach $\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1) \neq 0$

Setzen wir nun im Nenner in die z^{w_k} die Werte $z_1 = z_2 = \dots = z_d = 1$ ein. Als Beispiel setzten wir $w_1 = (x_1, x_2, \dots, x_d, 1)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{d+1}) &= \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{d+1})}{(1-z^{w_1})(1-z^{w_2}) \dots (1-z^{w_{d+1}})} \\ &= \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{d+1})}{(1-z_1^{x_1} z_2^{x_2} \dots z_d^{x_d} z_{d+1}^1)(1-z^{w_2}) \dots (1-z^{w_{d+1}})} = \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{d+1})}{(1-1^{x_1} \cdot 1^{x_2} \dots 1^{x_d} \cdot z_{d+1}^1) \dots (1-z^{w_{d+1}})} \\ &= \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{d+1})}{(1-z_{d+1}^1)(1-z_{d+1}^1) \dots (1-z_{d+1}^1)} = \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{d+1})}{(1-z_{d+1}^1)^{d+1}} \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.2 folgt:

$$\sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{d+1}) = Ehr_{\Delta}(z_{d+1}) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta}(t) z_{d+1}^t$$