Das Kontinuum diskret berechnen
Kapitel 3.4 bis 3.8
Ehrhart Theorie Teil II

Stephanie Tasche

2. Juni 2009

1 Die Eigenschaften der Ehrhart-Reihe eines ganzzahligen Polytops

Letzte Woche haben wir den Satz von Erhart bewiesen.

Satz 1 Satz von Erhart: *Wenn $\mathcal{P}$ ein ganzzahlliges konvexes d-Polytop ist, dann ist $L_{\mathcal{P}}(t)$ ein Polynom in t vom Grad d.*

Der Beweis hat uns zu folgender Darstellung der Ehrhart-Reihe geführt:

$$Ehr_{\Delta}(z_{d+1}) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta}(t) z_{d+1}^{t} = \frac{\sigma_{\Pi}(1, 1, \ldots, 1, z_{d+1})}{(1 - z_{d+1})^{d+1}}$$

Diese Darstellung lässt sich durch Beschreibung des Polynoms $\sigma_{\Pi}(1, 1, \ldots, 1, z_{d+1})$ weiter konkretisieren.

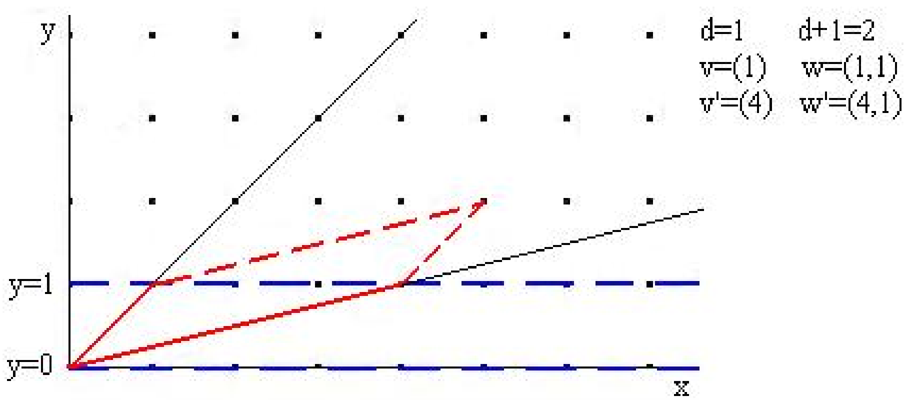

Abbildung 1: Parallelepiped für d=1

Wir wissen, dass der Koeffizient von z_{d+1}^{k} die Gitterpunkte in der Schnittmenge des Parallelepiped Π mit der Hyperebene $x_{d+1} = k$ zählt.

Korollar 1 *Sei Δ ein ganzzahliger d-Simplex mit Ecken $v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}$ und sei $w_j = (v_j, 1)$. Dann gilt*

$$Ehr_{\Delta}(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta}(t) z^{t} = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + h_0}{(1 - z)^{d+1}}$$

wobei h_k der Menge der Anzahl der Gitterpunkte in

$$\{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{d+1} w_{d+1} : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1} < 1\}$$

entspricht, deren letzte Variable gleich k ist.

In dieser Form ist Ehr_Δ und damit auch das Ehrhart-Polynom eines ganzzahligen Simplexes Δ in niedrigen Dimensionen berechenbar. Für beliebige ganzzahlige Polytope stellt die Triangulierung jedoch ein Problem dar. Zusätzlich muss man berücksichtigen, dass die Gitterpunkte dort, wo sich die Simplizes treffen, mehrfach gezählt werden.

Satz 2 Nichtnegativitätssatz von Stanley: *Sei $\mathcal{P}$ ein ganzzahliges konvexes d-Polytop mit Ehrhart-Reihe*

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{d+1}}.$$

Dann ist $h_0, h_1, \ldots, h_d \geq 0$.

Der *Beweis* ergibt sich aus der Tatsache, dass die Koeffizienten im Zähler der Ehrhart-Reihe eines ganzzahligen Simplexes etwas zählen. Zusätzlich lässt sich diese Tatsache auch formal durch Triangulierung und eine spezielle Verschiebung des Polytops nachweisen (vgl. S. 70 f.)

Lemma 1 *Sei $\mathcal{P}$ ein ganzzahlliges konvexes d-Polytop mit Ehrhart-Reihe*

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{d+1}}.$$

Dann gilt $h_0 = 1$.

Der *Beweis* diese Lemmas ist aus Abbildung 1 ersichtlich. h_0 bezeichnet die Anzahl der Punkte der Schnittmenge des Parallelepipeds mit der Hyperebene $x_{d+1} = 0$. Hierin liegt nach Konstruktion nur der Ursprung, also genau ein Punkt.

Lemma 2 WICHTIG *Für ein ganzzahlliges konvexes d-Polytop $\mathcal{P}$ mit Ehrhart-Reihe*

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = 1 + \sum_{t\geq 1} L_{\mathcal{P}}(t) z^t = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + 1}{(1-z)^{d+1}}$$

gilt

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \binom{t+d}{d} + h_1 \binom{t+d-1}{d} + \cdots + h_{d-1}\binom{t+1}{d} + h_d \binom{t}{d}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Bew.: } Ehr_{\mathcal{P}}(z) &= \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + 1}{(1-z)^{d+1}} \\
&= (h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + 1) \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^t \\
&= h_d \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^{t+d} + h_{d-1} \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^{t+d-1} + \cdots + \\
&\quad\; h_1 \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^{t+1} + \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^t \\
&= h_d \sum_{t\geq d} \binom{t}{d} z^t + h_{d-1} \sum_{t\geq d-1} \binom{t+1}{d} z^t + \cdots + h_1 \sum_{t\geq 1} \binom{t+d-1}{d} z^t + \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^t \\
&= \sum_{t\geq 0} \left(h_d \binom{t}{d} + h_{d-1} \binom{t+1}{d} + \cdots + h_1 \binom{t+d-1}{d} + \binom{t+d}{d} \right) z^t
\end{aligned}$$

Auf Basis dieser Darstellung werden wir drei Eigenschaften des Ehrhart-Polynoms kennenlernen.

Korollar 2 *Sei $\mathcal{P}$ ein ganzzahliges konvexes d-Polytop mit Ehrhart-Reihe*

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + 1}{(1-z)^{d+1}}.$$

Dann ist:
i) der konstante Term des Ehrhart-Polynoms $L_{\mathcal{P}}$ 1
ii) $h_1 = L_{\mathcal{P}}(1) - d - 1 = \#(\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^d) - d - 1$
Ist ferner das Ehrhart-Polynom $L_{\mathcal{P}}(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + 1$. Dann gilt:
iii) $d! c_k \in \mathbf{Z}$ für alle Koeffizienten

Bew.: Hierzu genügt das Einsetzen in die eben kennengelernte Darstellung der Ehrhart-Reihe:

$$\text{i)} \quad L_{\mathcal{P}}(0) = \binom{d}{d} + h_1 \binom{d-1}{d} + \cdots + h_{d-1} \binom{1}{d} + h_d \binom{0}{d} = \binom{d}{d} = 1$$

Gitterpunktzähler hatten wir bisher nur für $\mathbf{N}$ definiert. In diesem Korollar wird dieser Definitionsbereich verlassen. Der Satz von Ehrhart impliziert, dass die Gitterpnktzählfunktion als ein Polynom auf alle reelen und sogar komplexen Zahlen t erweitert werden kann. An dieser Stelle wissen wir, dass für $t = 0$ eine sinnvolle Deutung des $L_{\mathcal{P}}(t)$ existiert. Für negative ganze Zahlen werden wir in einem späteren Vortrag noch Interpretationen kennenlernen.

$$\text{ii)} \quad L_{\mathcal{P}}(1) = \binom{d+1}{d} + h_1 \binom{d}{d} + \cdots + h_{d-1} \binom{2}{d} + h_d \binom{1}{d} = d + 1 + h_1$$

Bemerkung: Analog lassen sich auch $h_2, h_3, \ldots$ in Abhängigkeit von $L_{\mathcal{P}}(1),\ L_{\mathcal{P}}(2), \ldots$ darstellen
iii) Die Umformung der Binomialkoeffizienten des Ehrhart-Polynoms nach Lemma 2 ergibt ein Polynom in t mit rationalen Koeffizienten mit Nenner $d!$.

Der folgende Satz ist für die Interpretation von $L_{\mathcal{P}}(t)$ für $t \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}_0$ wichtig.

Satz 3 *Sei p ein Polynom vom Grad d mit rationaler Erzeugendenfunktion*

$$\sum_{t \geq 0} p(t) z^t = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \cdots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{d+1}}$$

Dann gilt $h_d = h_{d-1} = \cdots = h_{k+1} = 0$ und $h_k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(-1) = p(-2) = \cdots = p(-(d-k)) = 0$ und $p(-(d-k+1) \neq 0$.

Bew.: "$\Longrightarrow$" Sei $h_d = h_{d-1} = \cdots = h_{k+1} = 0$ und $h_k \neq 0 \implies$

$$p(t) = h_0 \binom{t+d}{d} + \cdots + h_{k-1} \binom{t+d-k+1}{d} + h_k \binom{t+d-k}{d}$$

Für $t = -1, -2, \ldots, -d+k$ sind die Binomialkoeffizienten 0, also sind dies Nullstellen. Für $t = -d+k-1$ sind alle Binomialkoeffizienten außer dem letzten 0, sodass dies wegen der Voraussetzung $h_k \neq 0$ keine Nullstelle von p ist.
"$\Longleftarrow$" Sei $p(-1) = p(-2) = \cdots = p(-(d-k)) = 0$ und $p(-(d-k+1) \neq 0 \implies$

$$0 = p(-1) = h_0 \binom{d-1}{d} + h_1 \binom{d-2}{d} + \cdots + h_{d-1} \binom{0}{d} + h_d \binom{-1}{d} = h_d \binom{-1}{d}$$

$\Longrightarrow h_d = 0$ Analog erzwingen $-2, \ldots, -d+k$, dass $h_{d-1} = 0, \ldots, h_{k+1} = 0$ respektive. Zusätzlich gilt $h_k \neq 0$, da aus $h_k = 0$ folgt, dass $p(-d+k-1) = 0$ (Widerspruch zur Voraussetzung).

2 Vom diskreten zum stetigen Volumen eines Polytops

Das Volumen eines geometrischen Objektes $S \subset \mathbf{R}^d$ wird definiert durch das Integral $volS := \int_S dx$. Analog zur Idee des Riemann'schen Integrals lässt es sich durch d-dimendionale Boxen immer kleineren

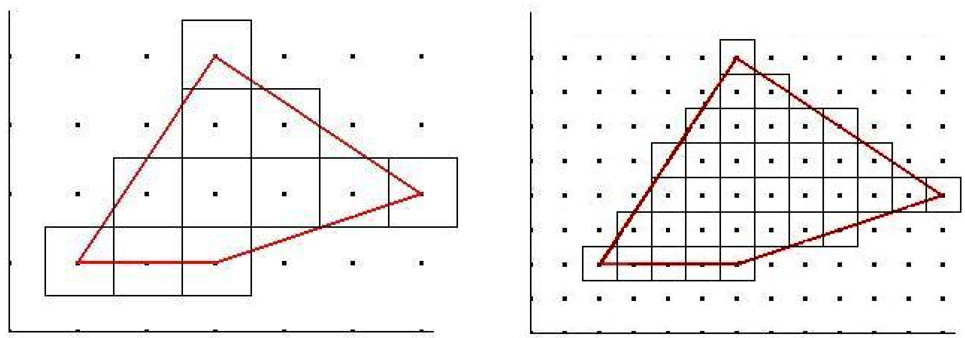

Abbildung 2: Annäherung des stetigen Volumens durch das diskrete Volumen

Volumens approximieren. Boxen, die den Platz zwischen den Punkten des Gitters $(\frac{1}{t}\mathbf{Z})^d$ haben die Kantenlänge $\frac{1}{t}$ und damit das Volumen $\frac{1}{t^d}$. Da die Anzahl der Boxen der Anzahl der Gitterpunkte in $(\frac{1}{t}\mathbf{Z})^d$ entspricht und wir wissen, dass $\#(S \cap (\frac{1}{t}\mathbf{Z})^d) = \#(tS \cap \mathbf{Z}^d)$, gilt:

Lemma 3 *Sei $S \subset \mathbf{R}^d$ eine d-dimensionale Teilmenge. Dann ist*

$$volS = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^d} \#(tS \cap \mathbf{Z}^d)$$

Bemerkung: Ist S ein Teilmenge geringerer Dimension, so gilt aktuell $volS = 0$.
Aufgrund des Satzes von Ehrhart lässt sich diese Volumensberechnung für ganzzahlige d-Polytope $\mathcal{P}$ nun folgendermaßen vereinfachen:

Korollar 3 *Sei $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^d$ ein ganzzahliges konvexes d-Polytop mit Ehrhart-Polynom $L_\mathcal{P}(t) = c_d t^d + c_{d-1}t^{d-1} + \cdots + c_1 t + 1$. Dann gilt $c_d = vol\mathcal{P}$.*

Bew.: $$vol\mathcal{P} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^d}\#(t\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^d) = \lim_{t\to\infty} \frac{c_d t^d + c_{d-1}t^{d-1} + \cdots + c_1 t + 1}{t^d} = c_d$$

Das stetige Volumen eines ganzzahligen Polytops lässt sich auch direkt aus der Ehrhart-Reihe ablesen.

Korollar 4 *Sei $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^d$ ein ganzzahliges konvexes d-Polytop und*

$$Ehr_\mathcal{P}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1}z^{d-1} + \cdots + h_1 z + 1}{(1-z)^{d+1}}.$$

Dann ist $vol\mathcal{P} = \frac{1}{d!}(h_d + h_{d-1} + \cdots + h_1 + 1)$.

Bew.: $$vol\mathcal{P} = \lim_{t\to\infty} \frac{h_d\binom{t}{d} + h_{d-1}\binom{t+1}{d} + \cdots + h_1\binom{t+d-1}{d} + \binom{t+d}{d}}{t^d} = \frac{1}{d!}(h_d + h_{d-1} + \cdots + h_1 + 1)$$

Die Tatsache, dass sich das Volumen als Koeffizient eines Polynoms berechnen lässt ist sehr überraschend, da es sich bei dem Polynom um eine Zählfunktion und damit um etwas diskretes handelt. Das Volumen ist dagegen eine stetige Größe. Das folgende Kapitel zeigt sogar, dass es ausreicht eine bestimmte Menge an Werten des Polynoms zu berechnen und dann zu interpolieren. Es ist also mit einem rein diskreten Verfahren möglich eine stetige Information zu erhalten.

3 Berechnung des Ehrhart-Polynoms durch Interpolation

Da es sich bei dem diskreten Volumen $L_{\mathcal{P}}$ eines ganzzahligen Polytops $\mathcal{P}$ um ein Polynom handelt, lässt sich stetige Volumen $vol\mathcal{P}$ und das diskrete Volumen $L_{\mathcal{P}}$ aus endlich vielen Daten berechen. Die Auswertung eines Polynoms $p(x) = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ an d+1 verschiedenen Punkten ergibt:

$$\begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_{d+1}) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} c_d \\ c_{d-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^d & x_1^{d-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^d & x_2^{d-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{d+1}^d & x_{d+1}^{d-1} & \cdots & x_{d+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Da V invertierbar ist, lassen sich die Koeffizienten nun berrechnen.

$$\begin{pmatrix} c_d \\ c_{d-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_{d+1}) \end{pmatrix}$$

Da nach Korrolar 2 $L_{\mathcal{P}}(0) = 1$ gilt, ergibt sich folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} L_{\mathcal{P}}(x_1) - 1 \\ L_{\mathcal{P}}(x_2) - 1 \\ \vdots \\ L_{\mathcal{P}}(x_d) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^d & x_1^{d-1} & \cdots & x_1 \\ x_2^d & x_2^{d-1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_d^d & x_d^{d-1} & \cdots & x_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_d \\ c_{d-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}$$

aus der sich auch das stetige Volumen $vol\mathcal{P} = c_d$ ablesen lässt.

4 Rationale Polytope und Ehrhart-Quasipolynome

Eine Untersuchung des Gitterpunktzählers rationaler Polytope erfolgt größtenteils analog zu dem ganzzahliger Polytope.

Satz 4 Satz von Ehrhart für rationale Polytope: *Falls $\mathcal{P}$ ein rationales konvexes d-Polytop ist, dann ist $L_{\mathcal{P}}(t)$ ein Quasipolynom in t vom Grad d. Seine Periode teilt das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Koordinaten der Ecken von $\mathcal{P}$.*

Der *Beweis* dieses Satzes basiert auf einer Erweiterung eines für Polynome bereits kennen gelernten Lemmas.

Lemma 4 *Falls*

$$\sum_{t \geq 0} f(t) z^t = \frac{g(z)}{h(z)}$$

dann ist f genau dann ein Quasipolynom vom Grad d, dessen Periode p teilt, wenn g und h Polynome sind, für die $deg(g) < deg(h)$ gilt, alle Nullstellen vonh p-te Einheitswurzeln sind und höchstens die Vielfachheit $d + 1$ haben, und es eine Nullstelle mit Vielfachheit genau $d + 1$ gibt (Annahme: g/h ist vollständig gekürzt).

Der Beweis dieses Lemmas ist nicht ganz einfach. Die Beweisidee besteht darin, dass Quasipolynom entsprechend seiner Periode in verschiedene Polynome zu zerlegen. Auf Basis dieses Lemmas, lässt sich die Ehrhart-Reihe für ein rationales konvexes d-Polytop, dessen Eckpunkte den Nenner p haben, unter der Bedingung, dass g ein Polynom vom Grad kleiner als $p(d+1)$ ist, folgendermaßen schreiben:

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z^p)^{d+1}}$$

Diese Bedingung bleibt nun zu zeigen. Dazu reicht es den Fall eines rationalen Simplex nachzuweisen. Der d-Simplex Δ habe die Ecken $v_1, v_2, \ldots, v_{d+1} \in \mathbf{Q}^d$ und der Nenner von Δ sei p. Wir bilden wie gewohnt einen Kegel über Δ mit $w_1 = (v_1, 1), w_2 = (v_2, 1), \ldots, w_{d+1} = (v_{d+1}, 1)$, sodass

$$cone(\Delta) = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{d+1} w_{d+1} : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1} \geq 0\} \subset \mathbf{R}^{d+1}$$

Um die bisherigen Erkenntnisse von letzter Woche anwenden zu können brauchen wir eine Beschreibung von $cone(\Delta)$ mit ganzzahligen Erzeugern. Diese erhalten wir, indem wir jeden Erzeuger w_k durch $pw_k \in \mathbf{R}^{d+1}$ ersetzen. Ab diesem Punkt läuft der Beweis analog zu dem vom Satz von Ehrhart.
Nun wissen wir, dass der Gitterpunktzähler eines rationalen Polytops ein Quasipolynom ist. Damit bleibt nur noch das Problem zu lösen dieses auch zu bestimmen. Kevin Woods, der sich mit diesem Thema beschäftigt hat, ist bei dem Punkt angelangt, dass es ihm, sofern das Qausipolynom für eine Periode bekannt ist, möglich ist, die kleinste Periode zu bestimmen. Zur ursprünglichen Bestimmung des Quasipolynoms benötigt er jedoch ein Orakel. Hier besteht also weiter Forschungsbedarf.

5 Reflexionen über die bisherigen Kenntnisse

Die jetzt vorhandenen allgemeinen Darstellungen der Ehrhart-Reihe sowohl für ganzzahlige als auch für rationale Polytope bestätigen alle bisher kennen gelernten Beispiele. $L_{\mathcal{P}}(t)$ des d-Einheitswürfels, des d-Standardsimplex, der ganzzahligen d-dim Pyramide und des ganzzahligen d-dim Kreuzpolytops waren alles Polynome in t vom Grad d. Der Satz von Pick besagt, dass $L_{\mathcal{P}}(t)$ von ganzzahligen Polygonen, also 2-dim Vielecke, ein Polynom vom Grad 2 ist. Dagegen ist $L_{\mathcal{P}}(t)$ von rationalen Polygonen ein Quasipolynom vom Grad 2. Die unterschiedlichen Ehrhart-Reihen sind ein Beleg dafür, welche Schwierigkeiten durch die Triangulierung der Polytope entstehen. Lediglich die Ehrhartreihe des Standardsimplex ist mit $Ehr_{\Delta}(z) = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$ trivial.
Sogar der Satz von Popoviciu ist mit dem Satz von Ehrhart für rationale Polytope erklärbar. Die Anzahl mit Linearkombinationen der Werte a und b den Wert n zu erreichen, entspricht der Anzahl der Gitterpunkte auf der Strecke, die durch die Punkte $(\frac{n}{a}, 0)$ und $(0, \frac{n}{b})$ gebildet wird. Deswegen handelt es sich bei der Funktion auch um ein Quasipolynom vom Grad 2 mit Periode ab.