

# Reziprozität

Diana Pohlmann

Sommersemester 2009

Wir werden in diesem Kapitel Reziprozitätsgesetze kennenlernen. Solche Gesetze bilden den Kern der Ehrhart-Theorie.

Zunächst ein Beispiel mit dem einfachsten (eindimensionalen) Fall eines Reziprozitätsgesetz: Sei  $\mathcal{I} := [0, \frac{1}{a}] \subset \mathbb{R}$ , ein rationales 1-Polytop ( $t \in \mathbb{Z}$  und  $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ ).

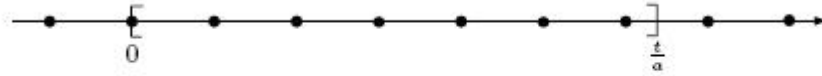


Abb. 4.1. Gitterpunkte in  $t\mathcal{I}$ .

Sein diskretes Volumen ist

$$L_{\mathcal{I}}(t) = \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor + 1,$$

und sein Gitterpunktzähler für das Innere  $\mathcal{I}^\circ := (0, \frac{1}{a})$  ist

$$L_{\mathcal{I}^\circ}(t) = \left\lfloor \frac{t-1}{a} \right\rfloor.$$

Mit Hilfe der elementaren Gleichung

$$\left\lfloor \frac{t-1}{a} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{-t}{a} \right\rfloor - 1 \quad \text{für } t \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{N},$$

erhalten wir algebraisch

$$L_{\mathcal{I}^\circ}(t) = -L_{\mathcal{I}}(-t).$$

Eine ähnliche Gleichung für Polytope in beliebigen Dimensionen ist:

**Satz 4.1 (Ehrhart-Macdonald-Reziprozität).** Sei  $\mathcal{P}$  ein rationales konvexes Polytop. Dann liefert die Auswertung des Quasipolynoms  $L_{\mathcal{P}}$  an negativen ganzen Zahlen

$$L_{\mathcal{P}}(-t) = (-1)^{\dim \mathcal{P}} L_{\mathcal{P}^\circ}(t).$$

# 1 Erzeugendenfunktion für ein wenig irrationale Kegel

Um Satz 4.1 zu beweisen brauchen wir noch einige Spezialfälle der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität. Wir folgern den Satz aus einer Gleichung für rationale Kegel. Jetzt starten wir zunächst mit einem Reziprozitätsgesetz für simpliziale Kegel.

## Satz 4.2 (Reziprozitätsgesetz für simpliziale Kegel).

Wir halten linear unabhängige Vektoren  $w_1, w_2, \dots, w_d \in \mathbb{Z}^d$  fest und bilden  $\mathcal{K} = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_d w_d : \lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0\}$ , den von den  $w_j$  erzeugten simplizialen Kegel. Dann gilt für  $v \in \mathbb{R}^d$ , für die der Rand des verschobenen simplizialen Kegels  $v + \mathcal{K}$  keinen Gitterpunkt enthält, dass

$$\sigma_{v+\mathcal{K}}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_d}\right) = (-1)^d \sigma_{-v+\mathcal{K}}(z_1, z_2, \dots, z_d).$$

*Beweis.* Aus dem Satz 3.3 (Vortrag von Theresa Bickeböller) haben wir die Formel

$$\sigma_{v+\mathcal{K}}(z) = \frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{(1-z^{w_1})(1-z^{w_2})\dots(1-z^{w_d})},$$

wobei  $\Pi$  das offene Parallelepiped

$$\Pi = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_d w_d : 0 < \lambda_1, \dots, \lambda_d < 1\}$$

ist und  $\sigma_{v+\mathcal{K}}$  eine rationale Funktion. Nach Voraussetzung enthält  $v + \Pi$  keine Gitterpunkte auf dem Rand. Natürlich gilt

$$\sigma_{-v+\mathcal{K}}(z) = \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)}{(1-z^{w_1})(1-z^{w_2})\dots(1-z^{w_d})}.$$

Die Beziehung der beiden Parallelepipede  $v + \Pi$  und  $-v + \Pi$  zueinander ist

$$v + \Pi = -(-v + \Pi) + w_1 + w_2 + \dots + w_d.$$

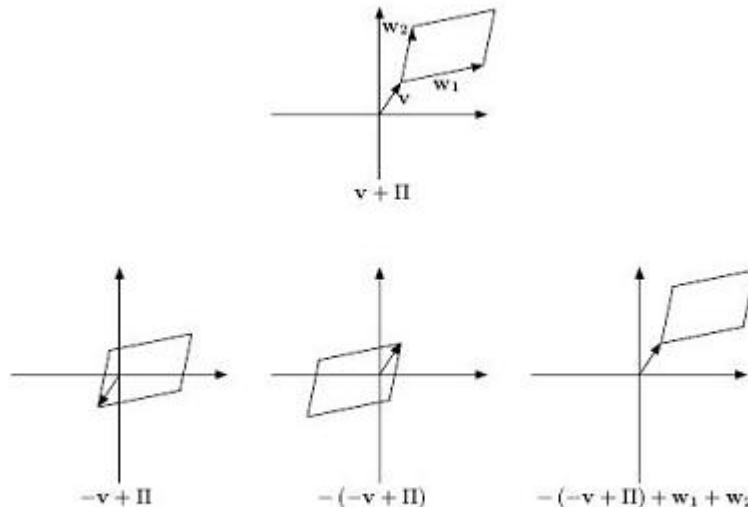


Abb. 4.2. Von  $-v + \Pi$  zu  $v + \Pi$ .

Jetzt übersetzen wir die Geometrie in die Erzeugendenfunktion:

$$\begin{aligned}
\sigma_{v+\Pi}(z) &= \sum_{m \in (v+\Pi) \cap \mathbb{Z}^d} z^m &= \sum_{m \in (-(-v+\Pi)+w_1+\dots+w_d) \cap \mathbb{Z}^d} z^m \\
&= \sum_{m' \in (-(-v+\Pi)) \cap \mathbb{Z}^d} z^{m'+w_1+\dots+w_d} &= \sum_{m' \in (-(-v+\Pi)) \cap \mathbb{Z}^d} z^{m'} z^{w_1} \dots z^{w_d} \\
&= \sum_{m'' \in (-v+\Pi) \cap \mathbb{Z}^d} z^{-m''} z^{w_1} \dots z^{w_d} &= \sum_{m'' \in (-v+\Pi) \cap \mathbb{Z}^d} \frac{1}{z^{m''}} z^{w_1} \dots z^{w_d} \\
&= \sigma_{-v+\Pi}\left(\frac{1}{z}\right) z^{w_1} z^{w_2} \dots z^{w_d}, \\
\iff \sigma_{v+\Pi}\left(\frac{1}{z}\right) &= \sigma_{-v+\Pi}(z) z^{-w_1} z^{-w_2} \dots z^{-w_d}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma_{v+\mathcal{K}}\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{\sigma_{v+\Pi}\left(\frac{1}{z}\right)}{(1-z^{-w_1})(1-z^{-w_2})\dots(1-z^{-w_d})} = \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z) z^{-w_1} z^{-w_2} \dots z^{-w_d}}{(1-z^{-w_1})(1-z^{-w_2})\dots(1-z^{-w_d})} \\
&= \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)}{(z^{w_1}-1)(z^{w_2}-1)\dots(z^{w_d}-1)} = (-1)^d \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)}{(1-z^{w_1})(1-z^{w_2})\dots(1-z^{w_d})} \\
&= (-1)^d \sigma_{-v+\mathcal{K}}(z).
\end{aligned}$$

## 2 Stanleys Reziprozitätsgesetz für rationale Kegel

Für das allgemeine Reziprozitätsgesetz für Kegel setzen wir die simplizialen Kegel einer Triangulierung zusammen.

**Satz 4.3 (Stanley-Reziprozität).** Sei  $\mathcal{K}$  ein rationaler  $d$ -Kegel mit Spitze im Koordinatenursprung. Dann gilt

$$\sigma_{\mathcal{K}}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_d}\right) = (-1)^d \sigma_{\mathcal{K}^\circ}(z_1, z_2, \dots, z_d).$$

*Beweis.* Wir triangulieren  $\mathcal{K}$  in die simplizialen Kegel  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_m$ . Es existiert ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  für den der verschobene Kegel  $v + \mathcal{K}$  gerade die inneren Gitterpunkte von  $\mathcal{K}$  enthält, also

$$\mathcal{K}^\circ \cap \mathbb{Z}^d = (v + \mathcal{K}) \cap \mathbb{Z}^d,$$

und keine Gitterpunkte auf dem Rand eines der Kegel der Triangulierung liegen

$$\partial(v + \mathcal{K}_j) \cap \mathbb{Z}^d = \emptyset \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m,$$

$$\partial(-v + \mathcal{K}_j) \cap \mathbb{Z}^d = \emptyset \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m.$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt

$$\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^d = (-v + \mathcal{K}) \cap \mathbb{Z}^d.$$

Jetzt folgt mit Satz 4.2 und den vorigen Gleichungen:

$$\sigma_{\mathcal{K}}\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma_{-v+\mathcal{K}}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^m \sigma_{-v+\mathcal{K}_j}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^m (-1)^d \sigma_{v+\mathcal{K}_j}(z) = (-1)^d \sigma_{v+\mathcal{K}}(z) = (-1)^d \sigma_{\mathcal{K}^\circ}(z).$$

### 3 Ehrhart-Macdonald-Reziprozität für rationale Polytope

**Definition 4.1.** Die Ehrhart-Reihe für das Innere des rationalen Polytops  $\mathcal{P}$  ist

$$Ehr_{\mathcal{P}^\circ}(z) := \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}^\circ}(t) z^t.$$

Nun können wir das Gegenstück von Satz 4.1 beweisen.

**Satz 4.4.** Sei  $\mathcal{P}$  ein konvexes rationales Polytop. Dann liefert die Auswertung der rationalen Funktion  $Ehr_{\mathcal{P}}$  bei  $\frac{1}{z}$  die Gleichung

$$Ehr_{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{\dim \mathcal{P} + 1} Ehr_{\mathcal{P}^\circ}(z).$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{P}$  ein  $d$ -Polytop. Lemma 4.2 aus dem Vortrag von Theresa B. besagt:

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{t \geq 0} L_{\mathcal{P}}(t) z^t = \sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}(1, 1, \dots, 1, z)$$

analog dazu ist

$$Ehr_{\mathcal{P}^\circ}(z) = \sigma_{(\text{cone}(\mathcal{P}))^\circ}(1, 1, \dots, 1, z).$$

Jetzt wenden wir Satz 4.3 auf den  $(d+1)$ -Kegel  $\mathcal{K} = \text{cone}(\mathcal{P})$  an:

$$\sigma_{(\text{cone}(\mathcal{P}))^\circ}(1, 1, \dots, 1, z) = (-1)^{d+1} \sigma_{\text{cone}(\mathcal{P})}\left(1, 1, \dots, \frac{1}{z}\right).$$

Nun kann Satz 4.1 bewiesen werden.

*Beweis der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität.* Als rationale Funktion gilt

$$Ehr_{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{t \geq 0} L_{\mathcal{P}}(t) z^{-t} = \sum_{t \leq 0} L_{\mathcal{P}}(-t) z^t = - \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(-t) z^t.$$

Kombiniert mit Satz 4.4 erhalten wir

$$\sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}^\circ}(t) z^t = (-1)^{d+1} Ehr_{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^d \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(-t) z^t.$$

Vergleicht man die Koeffizienten der beiden Potenzreihen erhalten wir das Reziprozitätsgesetz.

Mit Hilfe der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität können wir jetzt Satz 3.18 mit Ehrhart-Polynomen umformulieren:

**Satz 4.5.** Sei  $\mathcal{P}$  ein ganzzahliges  $d$ -Polytop mit Ehrhart-Reihe

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \dots + h_1 z + 1}{(1-z)^{d+1}}.$$

Dann gilt  $h_d = h_{d-1} = \dots = h_{k+1} = 0$  und  $h_k \neq 0$  genau dann, wenn  $(d-k+1)\mathcal{P}$  die kleinste ganzzahlige Streckung von  $\mathcal{P}$  ist, die einen inneren Gitterpunkt enthält.

*Beweis.* Satz 3.18 besagt, dass  $h_k$  genau dann der höchste von null verschiedene Koeffizient ist, wenn  $L_{\mathcal{P}}(-1) = L_{\mathcal{P}}(-2) = \dots = L_{\mathcal{P}}(-(d-k)) = 0$  und  $L_{\mathcal{P}}(-(d-k+1)) \neq 0$ . Mit der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität folgt der Satz.

## 4 Die Ehrhart-Reihe eines reflexiven Polytops

Als Anwendung von Satz 4.4 untersuchen wir jetzt eine spezielle Klasse von ganzzahligen Polytopen, deren Ehrhart-Reihe eine zusätzliche Symmetrie aufweisen. Wir nennen ein Polytop  $\mathcal{P}$ , das den Koordinatenursprung enthält, **reflexiv**, wenn es ganzzahlig ist und die  $\mathcal{H}$ -Beschreibung

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq 1\}$$

hat, wobei A eine ganzzahlige Matrix ist.

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung reflexiver Polytope über ihre Ehrhart-Reihe.

**Satz 4.6 (Hibi Palindromsatz).** Sei  $\mathcal{P}$  ein ganzzahliges  $d$ -Polytop, das den Koordinatenursprung in seinem Inneren enthält und die Ehrhart-Reihe

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{h_d z^d + h_{d-1} z^{d-1} + \dots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{d+1}}$$

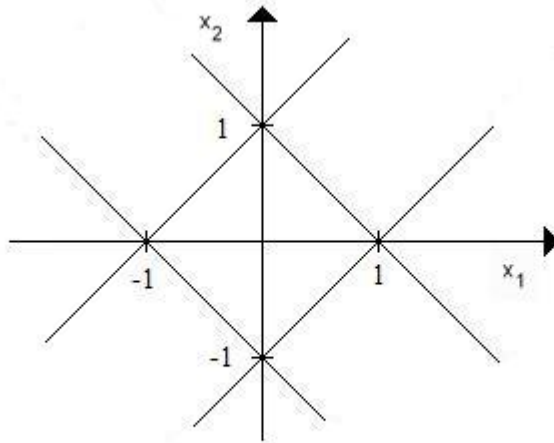
hat. Dann ist  $\mathcal{P}$  genau dann reflexiv, wenn  $h_k = h_{d-k}$  für alle  $0 \leq k \leq \frac{d}{2}$  gilt.

Diesen Satz werden wir nicht beweisen. Stattdessen zeigen wir ihn an einem Beispiel eines reflexiven Polytops.

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Dann gilt für die  $\mathcal{H}$ -Beschreibung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_2 \leq 1 - x_1 \\ x_2 \leq x_1 + 1 \\ x_2 \leq 1 + x_1 \\ x_2 \leq x_1 - 1 \end{pmatrix}.$$



Aus dem Vortrag von Sebastian J. wissen wir, dass die Ehrhart-Reihe eines Kreuzpolytops  $\mathcal{P}$

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}}$$

ist. In unserem Beispiel wäre das

$$Ehr_{\mathcal{P}}(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2 + 2z + 1}{(1-z)^3}$$

mit  $h_2 = 1$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_0 = 1$ .

Daraus folgt:  $h_k = h_{d-k}$  und somit ist Satz 4.6 gezeigt.

## 5 Reflexionen über Kapitel 2

Uns sind bereits mehrfach Spezialfälle der Ehrhard-Macdonald-Reziprozität begegnet.

Zum Beispiel im Vortrag von Hannah Lantermann und Sebastian Jäger.

Hier ergab die Auswertung bei negativen ganzen Zahlen sowohl bei dem  $d$ -Einheitswürfel, bei dem  $d$ -Standartsimplex, bei der  $d$ -Pyramide als auch bei dem  $d$ -Kreuzpolytop unsere Formel:

$$L_{\mathcal{P}}(-t) = (-1)^{\dim \mathcal{P}} L_{\mathcal{P}^\circ}(t).$$

Bemerkenswert ist, dass wir mit Satz 4.1 folgern können, dass das Zählen der *inneren* Gitterpunkte in einem rationalen Polytop gleichbedeutend mit dem Zählen der Gitterpunkte in seinem *Abschluss* ist.