

Das Kontinuum diskret berechnen

Seitenzahlen und die Dehn-Sommerville-Gleichung

Tanja Denfeld

Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Die Dehn-Sommerville-Gleichung	1
2	Dehn-Sommerville Erweitert	2
3	Anwendung auf die Koeffizienten eines Ehrhart-Polynoms	3
4	Relatives Volumen	4

1 Die Dehn-Sommerville-Gleichung

Satz 1: (Dehn-Sommerville-Gleichungen)

Wenn \mathcal{P} Ein einfaches d -Polytop ist und $0 \leq k \leq d$, dann gilt

$$f_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d-j}{d-k} f_j$$

wobei wir f_k als die Anzahl der k -dimensionalen Seiten von \mathcal{P} bezeichnen.

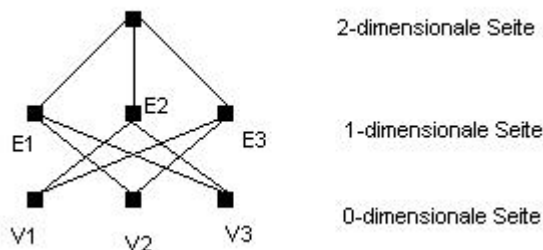
Für $k = d$ nimmt der Satz die Euler-Gleichung, die für beliebige Polytope gilt.

Satz 2: (Euler-Gleichung) Wenn \mathcal{P} ein konvexes d -Polytop ist, dann gilt

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j f_j = 1$$

Der **Seitenverband** von \mathcal{P} gibt die partielle Ordnung auf der Menge aller Seitenzahlen an.

Beispiel:(Der Seitenverband eines Dreiecks)



Vereinheitlichung der Dehn-Sommerville- Gleichungen und der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität:
Um die Konzepte der Seitenzahlen und der Gitterpunktzähler zu kombinieren, definieren wir:

$$F_k(t) = \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F} = k}} L_{\mathcal{F}}(t)$$

Nach dem Satz von Ehrhart ist F_k ein Quasipolynom. Da $L_{\mathcal{F}}(0) = 1$ für alle \mathcal{F} gilt

$$F_k(0) = f_k$$

Die Leitkoeffizienten von F_k messen das relative Volumen des k -Skeletts von \mathcal{P} .

2 Dehn-Sommerville Erweitert

Satz 3:

Falls \mathcal{P} ein einfaches rationales d -Polytop ist und $0 \leq k \leq d$, dann gilt

$$F_k(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d-j}{d-k} F_j(-t)$$

Für $k = d$ (mit t durch $-t$ ersetzt) ergibt sich folgende Formel:

$$L_{\mathcal{P}}(-t) = F_d(-t) = \sum_{j=0}^d (-1)^j F_j(t) = (-1)^d \sum_{j=0}^d (-1)^{d-j} F_j(t)$$

Auf der rechten Seite ergibt sich eine Einschluss/Ausschluss-Formel für die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von $t\mathcal{P}$.

Beweis:

Sei \mathcal{F} eine k -Seite von \mathcal{P} .

$$L_{\mathcal{F}}(t) = \sum_{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}} L_{\mathcal{G}^\circ}(t)$$

Nach der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität gilt:

$$L_{\mathcal{F}}(t) = \sum_{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}} (-1)^{\dim \mathcal{G}} L_{\mathcal{G}}(-t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \\ \dim \mathcal{G}=j}} L_{\mathcal{G}}(-t)$$

Die linke und die rechte Seite werden über alle k -Seiten aufsummiert.

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F}=k}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \\ \dim \mathcal{G}=j}} L_{\mathcal{G}}(-t) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F}=k}} \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \\ \dim \mathcal{G}=j}} L_{\mathcal{G}}(-t) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{G}=j}} f_k(\mathcal{P}/\mathcal{G}) L_{\mathcal{G}}(-t) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{G}=j}} \binom{d-j}{d-k} L_{\mathcal{G}}(-t) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d-j}{d-k} F_j(-t) \end{aligned}$$

$f_k(\mathcal{P}/\mathcal{G})$ entspricht der Anzahl der k -dimensionalen Seiten von \mathcal{P} , die eine vorgegebene j -dimensionale Seite \mathcal{G} enthalten.

3 Anwendung auf die Koeffizienten eines Ehrhart-Polynoms

Einzigster Seiten-Gitterpunktzähler, der die Seite \mathcal{P} mit einbezieht, ist $F_d(t)$. Die Gleichung zählt die Gitterpunkte seitenweise, somit müssen wir nicht annehmen, dass \mathcal{P} einfach ist.

$$L_{\mathcal{P}}(t) = F_d(t) = \sum_{j=0}^d (-1)^j F_j(-t)$$

$$(-1)^d F_d(-t) = (-1)^d L_{\mathcal{P}}(-t) = L_{\mathcal{P}^\circ}(t)$$

$$L_{\mathcal{P}}(t) - L_{\mathcal{P}^\circ}(t) = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j F_j(-t)$$

Die Differenz auf der linken Seite zählt die Gitterpunkte auf dem Rand von $t\mathcal{P}$ und es ergibt sich wieder eine Einschluss/Ausschluss-Formel.

Für $L_{\mathcal{P}}(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \dots + c_0$ ist dann $L_{\mathcal{P}^\circ}(t) = c_d t^d - c_{d-1} t^{d-1} + \dots + (-1)^d c_0$, so dass gilt

$$L_{\mathcal{P}}(t) - L_{\mathcal{P}^\circ}(t) = 2c_{d-1} t^{d-1} + 2c_{d-3} t^{d-3} + \dots + 2c_0 \quad (\text{falls } d \text{ ungerade})$$

$$L_{\mathcal{P}}(t) - L_{\mathcal{P}^\circ}(t) = 2c_{d-1} t^{d-1} + 2c_{d-3} t^{d-3} + \dots + 2c_1 t \quad (\text{falls } d \text{ gerade})$$

Satz 4:

Sei $L_{\mathcal{P}}(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \dots + c_0$ das Ehrhart-Polynom von P . Dann gilt

$$c_{d-1} t^{d-1} + c_{d-3} t^{d-3} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j F_j(-t)$$

Wir können die Aussage des Satzes auch präziser schreiben:

$$F_j(t) = \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F} = j}} L_{\mathcal{F}}(t) = c_{j,j} t^j + c_{j,j-1} t^{j-1} + \dots + c_{j,0}$$

Daraus folgt folgende Gleichung:

Korollar 5:

Falls k und d von ungleicher Parität sind, gilt

$$c_k = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^{j+k} c_{j,k}$$

4 Relatives Volumen

Erinnerung: Stetiges Volumen Falls $S \subset \mathbb{R}^d$ eine d -dimensionale Teilmenge ist, dann gilt $\text{vol} S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^d} * \#(tS \cap \mathbb{Z}^d)$ (Lemma 3.19). Hierbei ist es wichtig, dass S Dimension d hat, denn sonst wäre nach Definition $\text{vol} S = 0$.

Da uns auch das Volumen interessiert, welches $S \subset \mathbb{R}^d$ nicht von der Dimension d ist, sagen wir, $S \subset \mathbb{R}^d$ sei von Dimension $m < d$, und sei $\text{span} S = \{x + \lambda(y - x) : x, y \in S, \lambda \in \mathbb{R}\}$ die affine Hülle von S . Wir berechnen nach dem Gleichen Verfahren wie oben das Volumen relativ zum Untergitter $(\text{span} S) \cap \mathbb{Z}^d$. Wir nennen dies das **relative Volumen** von S . Von jetzt an ist $\text{vol} S$ das relative Volumen von S und wir formulieren Lemma 3.19 um, damit es auch auf der m -dimensionalen Mengen $S \subset \mathbb{R}^d$ anwendbar wird.

$$\text{vol} S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^m} * \#(tS \cap \mathbb{Z}^d)$$

Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ ein ganzzahliges m -Polytop dann gilt:

$$\text{vol}S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^m} * L_{\mathcal{P}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_m t^m + c_{m-1} t^{m-1} + \dots + c_1 t + 1}{t^m} = c_m$$

mit $L_{\mathcal{P}}(t) = c_m t^m + c_{m-1} t^{m-1} + \dots + c_1 t + 1$

Das relative Volumen von \mathcal{P} ist der Leitterm der Zählerfunktion $L_{\mathcal{P}}$. Der Leitterm für eine Facette ist einfach das relative Volumen dieser Facette.

Satz 6:

Sei $L_{\mathcal{P}} = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \dots + c_0$ das Ehrhart-Polynom des ganzzahligen Polytops \mathcal{P} .

Dann gilt

$$c_{d-1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{F} \text{ Facette} \\ \text{von } \mathcal{P}}} \text{vol } \mathcal{F}$$

Beweis:

$$c_{d-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^{j+d-1} c_{j,d-1} \quad \text{mit} \quad c_{j,d-1} = \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F} = j}} c_{d-1}^{(\mathcal{F})} = \begin{cases} 0, & j < d-1 \\ \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F} = j}} \text{vol}(\mathcal{F}), & j = d-1 \end{cases} \text{ folgt:}$$

$$\frac{1}{2} c_{d-1,d-1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{F} = d-1}} \text{vol } \mathcal{F}$$