

Magische Quadrate

Andriy Zyatkovskyy

Sommersemester 09

1 Einleitung

Semimagisches Quadrat - eine quadratische Matrix, deren Einträge nichtnegative ganze Zahlen sind und deren Zeilen und Spalten jeweils dieselbe Summe ergeben.

3	0	0
0	1	2
0	2	1

Magisches Quadrat - ein semimagisches Quadrat, dessen Hauptdiagonalen ebenfalls die Zeilensumme ergeben.

1	2	0
0	1	2
2	0	1

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es die semimagischen und magischen Quadrate zu zählen und zwar wird diese Anzahl als Funktion der Zeilensumme definiert. Wir bezeichnen die Gesamtanzahlfunktion der Ordnung n mit Zeilensumme t durch $H_n(t)$ für semimagische Quadrate und $M_n(t)$ für magische Quadrate.

Beispiel für $n = 2$ und Summe = t :

Ein semimagisches Quadrat 2×2 lässt sich leicht bestimmen, sobald man einen seiner Einträge kennt. Sagen wir z.B., dass der erste Eintrag gleich X ist. Dann folgt, dass der zweite Eintrag oben, sowie der erste unten gleich $t - X$ sein müssen und dann der zweite Eintrag unten muss gleich $t - (t - X) = X$ sein. Also der Eintrag X muss eine beliebige ganze Zahl zwischen 0 und t sein.

X	$t - X$
$t - X$	X

Es gibt $1 + t$ solche Zahlen woraus die Anzahlfunktion folgt:

$$H_2(t) = t + 1$$

Bei dem magischen Quadrat muss man noch die Diagonale berücksichtigen. Wir betrachten die Summe der ersten Diagonale des semimagischen Quadrates und erhalten $2X = t$ bzw. $X = t/2$. Also $t - X = t/2$ folgt magisches Quadrat (2x2) hat überall die identischen Einträge

$t/2$	$t/2$
$t/2$	$t/2$

Da die Einträge nur ganzzahlig sein dürfen, muss t gerade sei und in diesem Fall ist die Anzahl magischer Quadrate = 1

$$M_2(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } t \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Aus diesem Beispiel sieht man, dass $H_n(t) \neq M_n(t)$.

2 Semimagische Quadrate: Gitterpunkte im Birkhoff-von Neumann-Polytop

Birkhoff-von Neumann-Polytop ist ein $(n \times n)$ -Quadrat mit n^2 nicht negativen Einträgen:

$$B_n := \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2} : x_{jk} \geq 0, \sum_j x_{jk} = 1 \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \right. \\ \left. \sum_k x_{jk} = 1 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \right\}$$

Da B_n schlecht vorstellbar ist, betrachten wir $B_2 \subset \mathbb{R}^4$ und versuchen uns vorzustellen wie ein Punkt in B_2 aussieht. In unserem Beispiel ist dieser Punkt durch X leicht zu bestimmen

$$\begin{pmatrix} X & 1 - X \\ 1 - X & X \end{pmatrix}$$

Wobei $0 \leq X \leq 1$ die Ecken von B_2 sind durch $X = 0$ und $X = 1$ gegeben. Wenn man dies verallgemeinert, kommt raus, dass B_n ein $(n - 1)^2$ -Polytop ist, dessen Ecken die Permutationsmatrizen sind. Wir betrachten Gitterpunktzähler für B_n

$$H_n(t) = \#(tB_n \cap \mathbb{Z}^{n^2}) = L_{B_n}(t)$$

Da die Ecke Gitterpunkte in B_n sind, können wir den Satz von Ehrhart (Satz 3.8) anwenden:

Aus dieser Beschreibung von B_n können wir leicht die Erzeugendenfunktion für H_n ableiten. Nach Satz 2.13 gilt für ein allgemeines rationales Polytop $\rho = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d : Ax = b\}$, dass

$$L_\rho(t) = \text{const} \left(\frac{1}{(1 - z^{c_1})(1 - z^{c_2}) \cdots (1 - z^{c_d}) z^{tb}} \right)$$

,wobei c_1, c_2, \dots, c_d die Spalten von A bezeichnen. Um den Übersicht nicht zu verlieren, benutzen wir z_1, z_2, \dots, z_n für die ersten n Zeilen und w_1, w_2, \dots, w_n für die letzten n Zeilen. Diese Notation in Kombination mit dem Satz 2.13 angewandt auf B_n liefert folgenden Satz:

Satz 6.5. Die Anzahl $H_n(t)$ der semimagischen $(n \times n)$ -Quadrate mit Reihensumme t erfüllt

$$H_n(t) = \text{const} \left(\frac{1}{\prod_{1 \leq j, k \leq n} (1 - z_j w_k) \left(\prod_{1 \leq j \leq n} z_j \prod_{1 \leq k \leq n} w_k \right)} \right)$$

Die kann man vereinfachen:

$$H_n(t) = \text{const}_{z_1, \dots, z_n} \left((z_1 \cdots z_n)^{-t} \left(\text{const}_w \frac{1}{(1 - z_1 w) \cdots (1 - z_n w) w^t} \right)^n \right)$$

Und wir gehen aber weiter und rechnen

$$\text{const}_w \frac{1}{(1 - z_1 w) \cdots (1 - z_n w) w^t}$$

aus und zwar mithilfe eine Partialbruchzerlegung. Die w -Pole sind $1/z_1, \dots, 1/z_n$ also wir zerlegen in

$$\frac{1}{(1 - z_1 w) \cdots (1 - z_n w) w^t} = \frac{A_1}{w - 1/z_1} + \frac{A_2}{w - 1/z_2} + \cdots + \frac{A_n}{w - 1/z_n} + \sum_{k=1}^t \frac{B_k}{w^k}$$

Genau wie in Kapitel 1 wird der B_k -Term ignoriert, also

$$\begin{aligned} \text{const}_w \frac{1}{(1 - z_1 w) \cdots (1 - z_n w) w^t} &= \text{const}_w \left(\frac{A_1}{w - 1/z_1} + \frac{A_2}{w - 1/z_2} + \cdots + \frac{A_n}{w - 1/z_n} \right) \\ &= -A_1 z_1 - A_2 z_2 - \cdots - A_n z_n \end{aligned}$$

und

$$A_k = - \frac{z_k^{t+n-2}}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}$$

Beim Einsetzen dieser Koeffizienten in die Partialbruchzerlegung erhalten wir :

Satz 6.6. Die Anzahl $H_n(t)$ semimagischer $(n \times n)$ -Quadrate mit Reihensumme t erfüllt

$$H_n(t) = \text{const} \left((z_1 \cdots z_2)^{-t} \left(\sum_{k=1}^n \frac{z_k^{t+n-1}}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)} \right)^n \right)$$

4 Die Aufzählung magischer Quadrate

Satz 6.7. Die Zählerfunktion $M_n(t)$ ist ein Quasipolynom in t . Untersuchen wir den Fall (3x3)-Quadrate.

z_1	z_2	z_3
m_4	m_5	m_6
m_7	m_8	m_9

(3x3)-Quadrate hat 9 Einträge die, wir ausrechnen wollen, also haben wir 9 Unbekannten $m_1 \cdots m_9$ in folgendem Verhältnis zu einander:

$$m_1 + m_2 + m_3 = t$$

$$m_4 + m_5 + m_5 = t$$

$$m_7 + m_8 + m_9 = t$$

$$m_1 + m_4 + m_7 = t$$

$$m_2 + m_5 + m_8 = t$$

$$m_3 + m_6 + m_9 = t$$

$$m_1 + m_5 + m_9 = t$$

$$m_3 + m_5 + m_7 = t$$

Wir Übersetzen unsere Gleichungssystem in eine Erzeugendenfunktion. Dafür brauchen wir für jede Gleichung genau eine Variable, also z_1, z_2, z_3 für die ersten 3 Gleichungen, w_1, w_2, w_3 für die nächsten 3 und y_1, y_2 für die letzten 2

$$M_3(t) = \frac{1}{(1 - z_1 w_1 y_1)(1 - z_1 w_3 y_2)(1 - z_2 w_2 y_1 y_1)(1 - z_1 w_2)(1 - z_2 w_1)(1 - z_2 w_3)} \\ \times \frac{1}{(1 - z_3 w_2)(1 - z_3 w_1 y_2)(1 - z_3 w_3 y_1)(z_1 z_2 z_3 w_1 w_2 w_3 y_1 y_2)^t}$$

Wenn man diesen Term berechnet, kommt folgendes raus:

$$M_3(t) := \begin{cases} \frac{2}{9}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 & \text{falls } t \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$