Das Kontinuum diskret berechnen
Kapitel 9
Die Zerlegung eines Polytops in seine Kegel

Florian Landsgesell

8. Juli 2009

1 Der Satz von Brion in der ersten Dimension

Der Satz von Brion verallgemeinert die endliche geometrische Reihe $\sum_{m=a}^{b} z^m = \frac{z^{b+1}-z^a}{z-1}$ auf höhere Dimensionen. Betrachten wir zunächst den Geradenabschnitt $\mathcal{I} := [20, 34]$. Wie wir bereits wissen, werden die Gitterpunkte von $\mathcal{I}$ durch Gitterpunkttransformation als Monome aufgelistet:

$$\sigma_{\mathcal{I}}(z) = \sum_{m \in \mathcal{I} \cap \mathbb{Z}} z^m = z^{20} + z^{21} + ... + z^{34}.$$

Eine kompaktere Darstellung desselben erhalten wir durch die rationale Funktion

$$\sigma_{\mathcal{I}}(z) = \frac{z^{20} - z^{35}}{1 - z},$$

die jedoch für $z = 1$ nicht definiert ist. Den Wert für $z = 1$ erhalten wir durch Auswertung des Polynoms $\sigma_{\mathcal{I}}(1) = 15$.

Nun formen wir unsere Funktion um und erhalten:

$$\sigma_{\mathcal{I}}(z) = \frac{z^{20} - z^{35}}{1 - z} = \frac{z^{20}}{1 - z} + \frac{z^{35}}{z - 1} = \frac{z^{20}}{1 - z} + \frac{z^{34}}{1 - \frac{1}{z}}.$$

Dieser neue Term lässt sich als Summe zweier geometrischer Reihen anschaulich interpretieren!
Es gilt nämlich:

$$\frac{z^{20}}{1 - z} = \frac{-z^{20}}{z - 1} = \sum_{m \geq 20} z^m = \sigma_{[20,\infty)}(z).$$

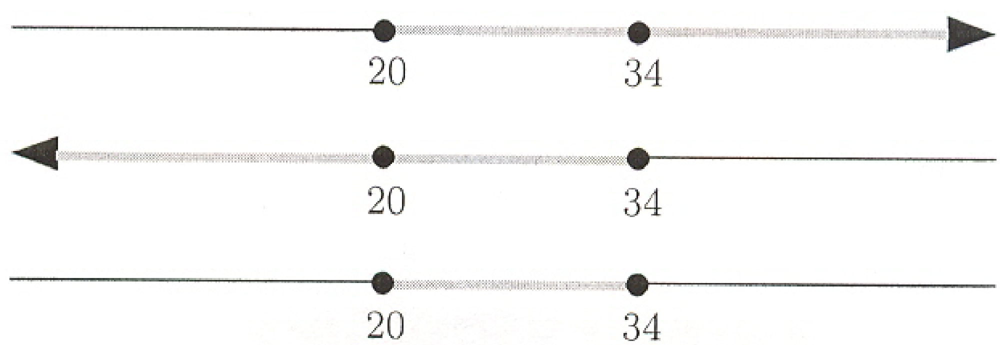
Der Bruch ist also nichts anderes als die Gitterpunkttransformation des Intervalls $[20, \infty)$.
Der zweite Bruch

$$\frac{z^{34}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z^{34+1}}{z - 1} = \sum_{m \leq 34} z^m = \sigma_{(-\infty,34]}(z)$$

bedeutet die Gitterpunkttransformation des Intervalls $(-\infty, 34]$. Die Umformung besagt also, dass auf der Ebene rationaler Funktionen folgende Gleichheit gilt:

$$\sigma_{[20,\infty)}(z) + \sigma_{(-\infty,34]}(z) = \sigma_{[20,34]}(z)$$

Die Summe zweier rationaler Funktionen, die unendliche Folgen darstellen, ergibt ein Polynom mit einer endlichen Anzahl von Termen. Diese Eigenschaft ist noch verblüffender, wenn man sie geometrisch ausdrückt: Zwei Halbgeraden summieren sich zu einer Strecke.



Wir dürfen uns also wundern. Auf der Ebene unendlicher Reihen macht die Gleichung jedoch keinen Sinn, denn die Reihen haben disjunkte Konvergenzbereiche.

2 Viel Lärm um Nichts

2.1 Definition

Sei $\mathcal{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum, $w \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein n-dimensionaler Untervektorraum so, dass $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^d$ die Basis $v_1, ..., v_n$ besitzt. Jeder Gitterpunkt in $\mathcal{A}$ kann also in der Form $w + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ geschrieben werden. Die Mengen $\mathcal{O} := \{w + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n\}$ heißen Schieforthanten von $\mathcal{A}$, wobei für jedes $1 \leq j \leq n$ entweder $\lambda_j \geq 0$ oder $\lambda_j < 0$.

2.2 Bemerkung

Mit Voraussetzungen wie in der Definition gibt es 2^n Schieforthanten, und es gilt:

$$\mathcal{O}_1 \cup ... \cup \mathcal{O}_{2^n} = \mathcal{A}.$$

Schieforthanten sind halboffene, spitze Kegel.

2.3 Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum mit Schieforthanten $\mathcal{O}_1 \cup ... \cup \mathcal{O}_{2^n}$. Dann gilt:

$$\sigma_{\mathcal{O}_1}(z) + ... + \sigma_{\mathcal{O}_{2^n}}(z) = 0$$

Da $\mathcal{O}_1 \cup ... \cup \mathcal{O}_{2^n} = \mathcal{A}$, können wir nun sinnvollerweise definieren:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z) := 0$$

Beweis:
Jeder Schieforthant $\mathcal{O}_i$ hat genau einen gegenüberliegenden Schieforthanten $\mathcal{O}_j$ mit $\sigma_{\mathcal{O}_i}(z) + \sigma_{\mathcal{O}_j}(z) = 0$, wird also rechnerisch durch ihn negiert. $\Rightarrow \sigma_{\mathcal{O}_1}(z) + ... + \sigma_{\mathcal{O}_{2^n}}(z) = 0$

2.4 Satz

Seien $K_1, ..., K_m \subseteq \mathbb{R}^d$ halboffene spitze Kegel mit gemeinsamer Spitze $\in \mathbb{Z}^d$, sodass ihre disjunkte Vereinigung einen affinen Raum bildet. Dann gilt:

$$\sigma_{K_1}(z) + ... + \sigma_{K_m}(z) = 0$$

Beweis:

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_{\mathcal{K}_j}(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2^n} \sigma_{\mathcal{K}_j \cap \mathcal{O}_k}(z) = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{\mathcal{K}_j \cap \mathcal{O}_k}(z) = \sum_{k=1}^{2^n} \sigma_{\mathcal{O}_k}(z) = 0,$$

nach Lemma 2.3.

3 Tangentialkegel und ihre rationalen Erzeugendenfunktionen

3.1 Bemerkung und Definition

Seien $a_1, ..., a_d, b \in \mathbb{Z}, \mathcal{H}$ ein Hyperebenenarrangement. Dann gilt:
Jede Hyperebene im Arrangement $\mathcal{H}$ lässt sich schreiben als $\{x \in \mathbb{R} | \, a_1x_1 + ... + a_dx_d \leq b\}$.
$\Rightarrow \mathcal{H}$ ist rational.
Wenn alle seine Hyperebenen sich (mindestens) in einem Punkt schneiden, heißt $\mathcal{H}$ zentrales Hyperebenenarrangement.

3.2 Definition

i) Der Schnitt endlich vieler Halbräume der Form $\{x \in \mathbb{R}^d | \, a_1x_1 + ... + a_dx_d \leq b\}$, für die die zugehörigen Hyperebenen $\{x \in \mathbb{R}^d | \, a_1x_1 + ... + a_dx_d = b\}$ ein zentrales Arrangement

bilden, heißt konvexer Kegel.
ii)(dies erweitert die Definition für „spitze Kegel“:)
Wenn die definierenden Hyperebenen sich in genau einem Punkt schneiden, heißt der Kegel spitz.
iii) Sind alle seine definierenden Hyperebenen rational, so heißt der Kegel rational
(Kegel und Polytope sind Spezialfälle von Polyedern, d.h. von konvexen Körpern, die als Schnitt endlich vieler Halbräume definiert sind.)

iv) Die Menge $\mathcal{K}_\mathcal{F} := \{x + \lambda(y - x) | \, x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ einer Seite $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}$ heißt Tangentialkegel von $\mathcal{F}$.
$\mathcal{K}_\mathcal{F}$ ist der kleinste konvexe Kegel, der sowohl span$\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{P}$ enthält. Insbesondere gilt $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ =span$\mathcal{P}$.
v)Der Tangentialkegel $\mathcal{K}_v$ für eine Ecke v von $\mathcal{P}$ wird als Eckenkegel bezeichnet und ist spitz.

3.3 Lemma

Sei $\mathcal{F}$ eine Seite von $\mathcal{P}$. Dann gilt:

$$\text{span}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{F}$$

Beweis :
Für $x, y \in \mathcal{F}, \lambda \in \mathbb{R}$ ist $x + \lambda(y - x) = \text{span}\mathcal{F}$.

Wir nennen span$\mathcal{F}$ die *Spitze* des Tangentialkegels.

3.4 Das Orthogonalkomplement

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein affiner Raum mit $\mathcal{A} = \text{w} + \mathcal{V}$ für ein $w \in \mathbb{R}^d$ und einen Untervektorraum $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann heißt $\mathcal{A}^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d | \, x \cdot v = 0 \, \forall v \in \mathcal{V}\}$ Orthogonalkomplement von $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}^\perp$ hat die Eigenschaft $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp = \mathbb{R}^d$, was uns zu einem neuen Lemma führt.

3.5 Lemma

Der Tangentialkegel hat die Zerlegung

$$\mathcal{K}_\mathcal{F} = \text{span}\mathcal{F} \oplus \left((\text{span}\mathcal{F})^\perp \cap \mathcal{K}_\mathcal{F}\right).$$

Wenn $\mathcal{F}$ keine Ecke ist, folgt daraus:

$$\sigma_{\mathcal{K}_\mathcal{F}}(z) = 0.$$

Beweis: Da span$\mathcal{F} \oplus (\text{span}\mathcal{F})^\perp = \mathbb{R}^d$, folgt:

$$\mathcal{K}_\mathcal{F} \quad = \quad (\text{span}\mathcal{F} \oplus (\text{span}\mathcal{F})^\perp) \cap \mathcal{K}_\mathcal{F}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{span}\mathcal{F} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{F}}) \oplus ((\mathrm{span}\mathcal{F})^{\perp} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{F}}) \\
&= \mathrm{span}\mathcal{F} \oplus ((\mathrm{span}\mathcal{F})^{\perp} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{F}}).
\end{aligned}
$$

Des Weiteren gilt:

$$\sigma_{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}(z) = \sigma_{span\mathcal{F}\oplus((span\mathcal{F})^{\perp}\cap\mathcal{K}_{\mathcal{F}})}(z) = \sigma_{span\mathcal{F}}(z)\sigma_{(span\mathcal{F})^{\perp}\cap\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}(z) = 0,$$

weil $\sigma_{span\mathcal{F}}(z) = 0$.

4 Der Satz von Brion

4.1 Brianchon-Gram-Gleichung für Simplizes

Sei Δ ein d-Simplex und $1_S(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in S \\ 0 \text{ falls } x \notin S \end{cases}$ die Indikatorfunktion der Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

$$1_{\Delta}(x) = \sum_{\mathcal{F}\subseteq\Delta} (-1)^{\dim\mathcal{F}} 1_{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}(x)$$

Beweis: Fallunterscheidung:
Fall 1: $x \in \Delta$. Also $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}\ \forall \mathcal{F} \subseteq \Delta$. Aus der Gleichung wird:

$$1 = \sum_{\mathcal{F}\subseteq\Delta} (-1)^{dim\mathcal{F}} = \sum_{k=0}^{dim\Delta} (-1)^k f_k,$$

also die Euler-Gleichung für Simplizes, die wir bereits kennen.
Fall 2: $x \notin \Delta$. Dann gibt es genau eine eindeutig bestimmte Seite $\mathcal{F}$ mit minimaler Dimension, sodass $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ und $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ für alle Seiten $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$. Die Gleichung formt sich also um zu:

$$0 = \sum_{\mathcal{G}\supseteq\mathcal{F}} (-1)^{dim\mathcal{G}},$$

was ähnlich bewiesen wird wie die Gleichung im Fall 1.

4.2 Korollar (Satz von Brion für Simplizes)

Sei Δ ein rationaler Simplex. Dann gilt

$$\sigma_{\Delta}(z) = \sum_{\text{v Ecke von } \Delta} \sigma_{\mathcal{K}_{\mathrm{v}}}(z)$$

im Sinne rationaler Funktionen.

Beweis: Der Satz von Brion für Simplizes ist nichts anderes als die Brianchon-Gram-Gleichung über alle $m \in \mathbb{Z}$ summiert:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} 1_\Delta(m)z^m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\mathcal{F}\subseteq\Delta} (-1)^{dim\mathcal{F}} 1_{\mathcal{K}_\mathcal{F}}(m)z^m$$

Und das ist äquivalent zu

$$\sigma_\Delta(z) = \sum_{\mathcal{F}\subseteq\Delta} (-1)^{dim\mathcal{F}} \sigma_{\mathcal{K}_\mathcal{F}}(z).$$

Lemma 3.5 sagt uns, dass $\sigma_{\mathcal{K}_\mathcal{F}}(z) = 0$, außer, wenn $\mathcal{F}$ eine Ecke ist. Also gilt:

$$\sigma_\Delta(z) = \sum_{\text{v Ecke von } \Delta} \sigma_{\mathcal{K}_\mathrm{V}}(z).$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun auf beliebige konvexe rationale Polytope erweitern.

4.3 Satz von Brion

Sei $\mathcal{P}$ ein rationales konvexes Polytop. Dann gilt

$$\sigma_\mathcal{P}(z) = \sum_{\text{v Ecke von } \mathcal{P}} \sigma_{\mathcal{K}_\mathrm{V}}(z)$$

im Sinne rationaler Funktionen.

4.4 Brion impliziert Ehrhart

Der Satz von Ehrhart für rationale Polytope folgt relativ geradlinig aus dem Satz von Brion.

Beweis: Zu zeigen ist, dass der Gitterpunktzähler $L_\Delta(r + pt)$ ein Polynom in t ist.

$$\begin{aligned} L_\Delta(r+pt) &= \sum_{m\in(r+pt)\Delta\cap\mathbb{Z}^d} 1 \\ &= \lim_{z\to 1} \sigma_{(r+pt)\Delta}(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \sum_{\text{v Ecke von } \Delta} \sigma_{(r+pt)\mathcal{K}_\mathrm{V}}(z) && \text{nach Satz 4.3} \\ &= \lim_{z\to 1} \sum_{\text{v Ecke von } \Delta} z^{tpv}\sigma_{r\mathcal{K}_\mathrm{V}}(z). \end{aligned}$$

Der Ausdruck hinter dem Limes existiert für $z = 1$ eventuell nicht. Durch mehrfache Anwendung der Regel von de L'Hospital, wodurch z^{tpv} abgeleitet wird, erhalten wir irgendwann einen Term, der für $z = 1$ definiert ist. Wenn wir dann $z = 1$ setzen, entsteht ein Polynom in t.