Diskrete und Algorithmische Geometrie

WS 2007/2008

Blatt 12 Abgabe: Di 29.1.08

Aufgabe 1.
Gegeben seien die folgenden 4 Geraden in $\mathbb{R}^3$.

$$l_1 = \operatorname{aff}\left\{(2,0,0)^T, (2,1,2)^T\right\} \quad , \quad l_2 = \operatorname{aff}\left\{(0,2,0)^T, (-2,2,1)^T\right\},$$

$$l_3 = \operatorname{aff}\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 0\right)^T, \left(\frac{1}{6}, \frac{41}{24}, 1\right)^T\right\} \quad , \quad l_4 = \operatorname{aff}\left\{(5,5,0)^T, (5,5,1)^T\right\}$$

a) Berechne die Plücker-Koordinaten der Geraden.

b) Berechne die gemeinsamen Transversalen von l_1, l_2, l_3 und l_4.

Aufgabe 2.
Zeige, dass die auf Paaren von kanonischen Basisvektoren definierte äußere Multiplikation eine eindeutige Fortsetzung zu einer bilinearen Abbildung

$$\wedge : \bigwedge V \times \bigwedge V \to \bigwedge V$$

besitzt, der *äußeren Multiplikation* auf V.

Aufgabe 3.
Zeige:

a) Die äußere Multiplikation ist assoziativ und anti-kommutativ. (Anti-kommutativ bedeutet, dass $x \wedge y = -y \wedge x$ für alle $x, y \in V$.)

b) Für $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in V$ gilt genau dann $x^{(1)} \wedge \ldots \wedge x^{(k)} = 0$, wenn $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4.
Gegeben sei ein *Hyperboloid* H der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ mit $a, b, c > 0$. Zeige, dass die folgende Menge von Geraden den Hyperboloid H bestimmt.

$$\left\{(x,y,0)^T + \lambda\left(-\frac{a}{bc}y, \frac{b}{ac}x, 1\right)^T : \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \text{ wobei } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Prof. Dr. Thorsten Theobald
Dipl.-Math. Reinhard Steffens
FB 12 - Institut für Mathematik
http://www.math.uni-frankfurt.de/~steffens/algogeom/

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN