

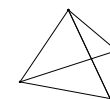


Puiseux-Reihen als Lösungen von Polynomgleichungssystemen und Faserpolytope

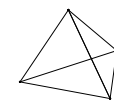
Reinhard Steffens



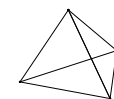
29. Juni 2007



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope



- 1) Überblick
- 2) **Problemstellung**
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope



Gegeben: k polynomiale Gleichungen in $k + m$ Variablen.

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0$$

Wobei $F_i \in \mathbb{C}[x, y]$.

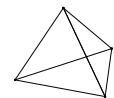
Ziel: Konstruiere k Puiseux-Reihen

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$$

so dass formal für alle $i = 1, \dots, k$

$$F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) = 0$$

gilt.



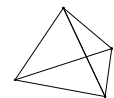
Puiseux-Reihe:

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^m} a_\alpha x^\alpha$$

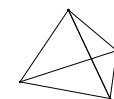
So dass

- $\text{Supp}(\varphi_i) = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\} \subset \frac{1}{N}\mathbb{Z}^m \cap v + C$
Für ein $N \in \mathbb{N}$, ein $v \in \mathbb{R}^m$ und einen streng konvexen Kegel $C \subset \mathbb{R}^m$.
- φ_i konvergiert auf einer nichtleeren Teilmenge $D_{\varphi_i} \subset (\mathbb{C}^*)^m$.
($x_i^{\alpha_i} := e^{\alpha_i \log x_i}$ wobei \log den Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}^* - \mathbb{R}_{\leq 0}$ bezeichnet.)

Konvergenzbereiche haben immer die Form $\text{Log}^{-1}(B)$ mit einer konvexen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^m$, wobei $\text{Log}(x) := (\log |x_1|, \dots, \log |x_m|)$



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) **Algorithmus**
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope



INPUT:

- k polynomiale Gleichungen in $k + m$ Variablen mit Exponenten in \mathbb{N} .

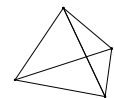
$$F_i^{(0)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \text{Supp}(F_i^{(0)})} a_{i, \alpha, \beta} x^\alpha y^\beta, \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

- $w \in (\mathbb{R}^m)^*$

OUTPUT:

- k Puiseux-Reihenentwicklungen $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ so dass

$$F_j(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) = 0 \quad (\text{formal}) \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\}$$



Startschritt:

Setze

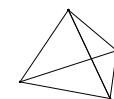
$$P^{(0)} := \sum_{i=1}^k \text{NP}(F_i^{(0)})$$

und wähle eine k -dimensionale Seite $f^{(0)}$ von $P^{(0)}$, so dass

- Die Projektion von $f^{(0)}$ auf die letzten k Koordinaten injektiv ist. ('zulässig')
- $f^{(0)}$ lässt sich als Summe von mind. eindimensionalen Seiten $f_i^{(0)} \subset \text{NP}(F_i^{(0)})$ schreiben. ('zerlegbar')
- $f^{(0)} \in S_{\pi,w}(P^{(0)})$ wobei

$$S_{\pi,w}(P^{(0)}) := \left\{ p \in \pi^{-1}(q) \mid q \in \pi(P^{(0)}), \langle w, p \rangle \geq \langle w, p' \rangle \forall p' \in \pi^{-1}(q) \right\}$$

und $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$.



Sei

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \dots & \delta_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{k,1} & \dots & \delta_{k,m} \end{pmatrix}$$

die Steigungsmatrix von $f^{(0)}$, d.h.

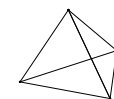
$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{m+k}$ ist in der Hyperebene die $f^{(0)}$ enthält gdw. $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^m$ mit $\alpha = \epsilon + \delta\beta$.

Bestimme nun eine Lösung $c^{(0)} = (c_1, \dots, c_k)$ der Face Equations zu $f^{(0)}$

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in f_i^{(0)}} a_{i, \alpha, \beta} c^\beta = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$$

und setze

$$\psi_{1,i} := c_i^{(0)} x_1^{-\delta_{i,1}^{(0)}} \dots x_m^{-\delta_{i,m}^{(0)}}.$$



Iterationsschritt $N \rightarrow N+1$:

Setze

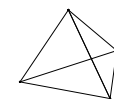
$$F_j^{(N+1)}(x, y) = F_j^{(N)}(x, y_1 + \psi_{N,1}, \dots, y_k + \psi_{N,k})$$

$$P^{(N+1)} = \sum_{i=1}^k \text{NP}(F_i^{(N+1)})$$

Wähle eine zulässige zerlegbare k -Seite $f^{(N+1)}$ von $P^{(N+1)}$, so dass:

- Die Steigungsmatrix $\delta^{(N+1)} = \begin{pmatrix} \delta_1^{(N+1)} \\ \vdots \\ \delta_k^{(N+1)} \end{pmatrix}$ von $f^{(N+1)}$ erfüllt

$$\langle w, \delta_i^{(N+1)} \rangle > \langle w, \delta_i^{(N)} \rangle \quad \text{für alle } i .$$



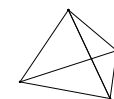
- $w \in N(f^{(N+1)}) \cap N(f^{(N)})$
wobei $N(f) := \left\{ w' \in (\mathbb{R}^m)^* \mid f \in S_{\pi, w'}(P) \right\}$.
- Die Face Equations von $f^{(N+1)}$ haben eine nicht verschwindende Lösung $c^{(N+1)}$.

Setze

$$\psi_{N+1,i} = c_i^{(N+1)} x^{-\delta_i^{(N+1)}} .$$

Die gesuchten Puiseux-Reihenentwicklungen ergeben sich dann als

$$\varphi_i = \sum_{N=1}^{\infty} \psi_{N,i} .$$

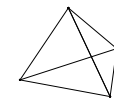


Satz (McDonald '02). *Für die auf obige Weise konstruierten φ_i gilt*

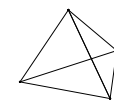
- *Die $\{\varphi_i\}$ sind formale Lösungen von $\{F_i = 0\}$.*
- *Die Exponenten der φ_i liegen in einem streng konvexem rationalem polyedrischem Kegel $C \subset \mathbb{R}^m$, so dass $w \in C^*$.*
- *Die Exponenten der φ_i liegen in einem Gitter $\frac{1}{N}\mathbb{Z}^m$.*

Gilt zusätzlich, dass die Nullstelle c der ersten Face Equations einfach ist und dass alle partiellen Ableitungen der Face Equations bei c nicht verschwinden, dann gilt:

- *Der Induktionsschritt des Algorithmus kann immer ausgeführt werden.*
- *Die φ_i konvergieren in $\text{Log}^{-1}(C^* + v)$ für ein $v \in \mathbb{R}^m$.*



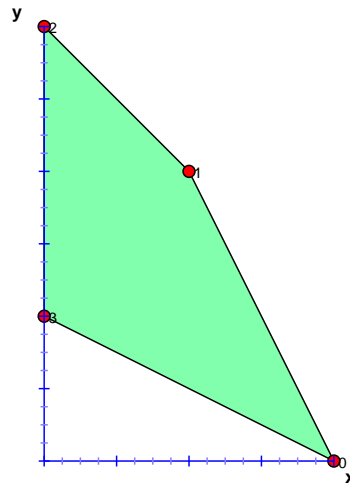
- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) **Beispiel in zwei Variablen**
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope



Beispiel:

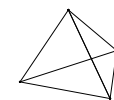
$$f^{(0)}(x, y) = x^2 + 4xy^2 + y^3 + y, \quad w = (-1, 0)$$

Das Newton-Polytop zu $f^{(0)}$ ist dann



Wir wählen die Seite $\overline{\binom{0}{1} \binom{2}{0}}$ mit Steigung $\delta = -2$. Die Face Equation lautet $1 + c^1 = 0$ und hat die Lösung $c = -1$. Das heißt wir haben $\psi_1 = -x^2$ und damit

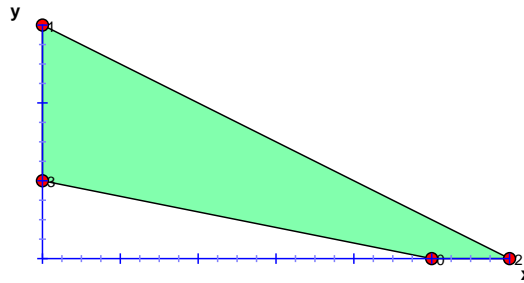
$$\varphi(x) = -x^2 + \text{h.o.t.}(x) .$$



Für den nächsten Schritt erhalten wir

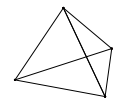
$$f^{(1)}(x, y) = f^{(0)}(x, y - x^2) = 4xy^2 - 8x^3y + 4x^5 + y^3 - 3x^2y^2 + 3yx^4 - x^6 + y$$

Das Newton-Polytop zu $f^{(1)}$ ist dann

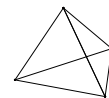


Wir wählen die Seite $\overline{\binom{0}{1}} \binom{5}{0}$ mit Steigung $\delta = -5$. Die Face Equation lautet $4 + c^1 = 0$ und hat die Lösung $c = -4$. Das heißt wir haben $\psi_2 = 4x^5$ und damit

$$\varphi(x) = -x^2 - 4x^5 + \text{h.o.t.}(x) .$$



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) [Beweisskizze für zwei Variablen](#)
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope



Wir zeigen nur, dass formal gilt: $f(x, \varphi(x)) = 0$.

$f(x, y) = F_x(y) \in$ 'Körper der Puiseux-Reihen'[y]

Zeige: $F_x(\varphi(x)) = 0$

Zeige dazu:

$$\forall r > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : \text{Supp}(F_x(\sum_{i=1}^n \psi_i)) \subset \mathbb{R} \setminus B(0; r)$$

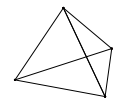
Wir haben:

$$f^{(n+1)}(x, y) = f^{(n)}(x, y + \psi_n) = \dots = f^{(0)}(x, y + \sum_{i=1}^n \psi_i)$$

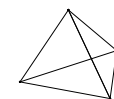
also

$$F_x(\sum_{i=1}^n \psi_i) = f^{(0)}(x, \sum_{i=1}^n \psi_i) = f^{(n+1)}(x, 0)$$

Da sich die Steigung δ streng monoton entwickelt, entwickeln sich auch die Exponenten in x streng monoton und da die Exponenten in einem Gitter $\frac{1}{N}\mathbb{Z}^2$ liegen auch unbeschränkt.



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) [Beispiel in mehreren Variablen](#)
- 7) Faser-Polytope
- 8) Gemischte Faser-Polytope

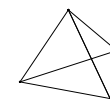
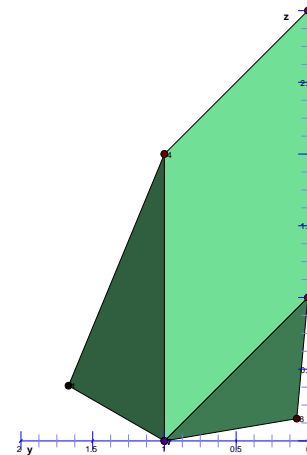
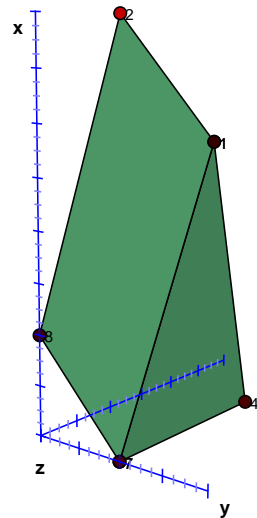


$$F_1^{(0)}(x, y_1, y_2) = x^3 y_1 + y_2^2 + 1$$

$$F_2^{(0)}(x, y_1, y_2) = x y_2 + x y_1 + x^2$$

$$w = (-1, 0, 0)$$

Die Minkowski-Summe der Newton-Polytope von F_1 und F_2 ist dann:



Wir wählen die Seite

$$\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Steigung

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Zerlegung

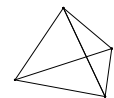
$$\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} .$$

Die Face Equations lauten dann

$$\begin{aligned} 1 + c_2^2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir wählen $c_1 = i$ und $c_2 = -i$ (mit den anderen Lösungen geht es analog) und erhalten

$$\psi_{1,1}(x) = i \quad \psi_{1,2}(x) = -i .$$



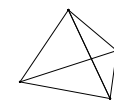
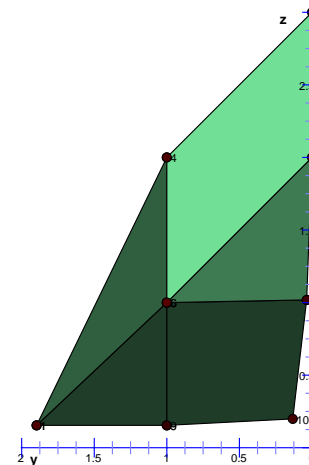
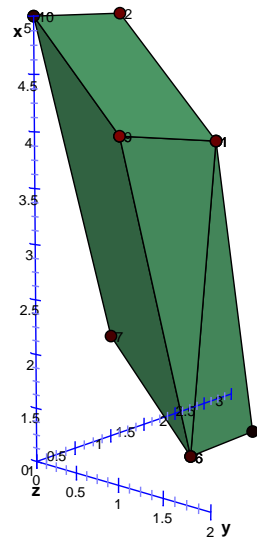
Im zweitem Schritt erhalten wir

$$F_1^{(1)}(x, y_1, y_2) = F_1^{(0)}(x, y_1 + i, y_2 - i) = x^3 y_1 + i x^3 + y_2^2 - 2i y_2$$

$$F_2^{(1)}(x, y_1, y_2) = F_2^{(0)}(x, y_1 + i, y_2 - i) = x y_2 + x y_1 + x^2$$

$$w = (-1, 0, 0)$$

Die Minkowski-Summe der Newton-Polytope von $F_1^{(1)}$ und $F_2^{(1)}$ ist dann:



Wir wählen die Seite

$$\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Steigung $\delta = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und der Zerlegung $\overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

Die Face Equations lauten dann

$$i - 2ic_2 = 0$$

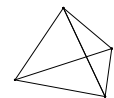
$$c_1 + 1 = 0$$

Wir erhalten

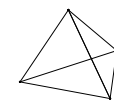
$$\psi_{2,1}(x) = \frac{1}{2}x \quad \psi_{2,2}(x) = -1x^3$$

und damit

$$\varphi_1(x) = i + \frac{1}{2}x + \text{h.o.t.}(x) \quad \varphi_2(x) = -i - x^3 + \text{h.o.t.}(x).$$



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) [Faser-Polytope](#)
- 8) Gemischte Faser-Polytope



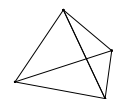
Sei $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ und $P, Q = \pi(P)$ Polytope. Ein Schnitt γ von π ist eine stetige Funktion $Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ so dass $\gamma(x) \in \pi^{-1}(x) \forall x \in Q$.

Wir definieren das Faser-Polytop $\sum_{\pi}(P)$ als

$$\begin{aligned} \sum_{\pi}(P) &:= \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q (\pi^{-1}(x) \cap P) dx \\ &:= \left\{ \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q \gamma(x) dx \mid \gamma \text{ stetig und } \pi \circ \gamma = \text{id}_Q \right\} \end{aligned}$$

$\sum_{\pi}(P)$ ist ein nichtleeres konvexes $N - M$ -dimensionales Polytop und die Knoten korrespondieren zu maximalen Schnitten $S_{\pi,w}$.

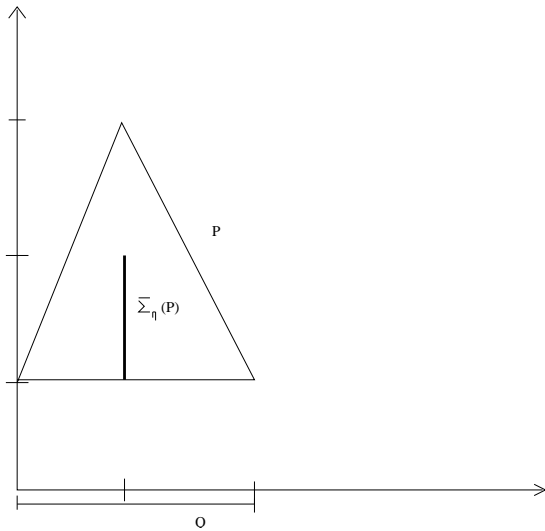
Ist P ein Simplex, so korrespondieren die Knoten des Faser-Polytops zu Triangulierungen von Q .





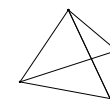
Beispiel:

- Für $Q = \{q\}$ ist $\sum_{\pi}(P) = P$.
- Sei $P = R \times Q$ und sei π die kanonische Projektion auf Q , so ist $\sum_{\pi}(P) = R \times \{q_0\}$ wobei q_0 der Schwerpunkt von Q ist.



$$\int_{[0,2]} \wedge dx = \begin{pmatrix} \int_0^2 x dx \\ \int_0^1 2x+1 dx + \int_1^2 -2x+5 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\int_{[0,2]} \text{---} dx = \begin{pmatrix} \int_0^2 x dx \\ \int_0^2 1 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



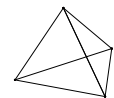
Zusammenhang mit dem McDonald Algorithmus:

- Sei $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die letzten k Koordinaten
- $P = \sum_{i=1}^k \text{NP}(F_i)$
- $Q = \pi(P)$

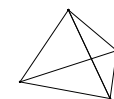
Maximale Mengen von Puiseux-Reihen für F_1, \dots, F_k korrespondieren zu Äquivalenzklassen maximaler Schnitte von π , wobei zwei Schnitte äquivalent sind, wenn sie die selbe Menge zerlegbarer Seiten liefern.

Gilt $\text{NP}_1 = \dots = \text{NP}_k$, so ist jede Seite von P zerlegbar und daher korrespondieren maximale Lösungsmengen zu den maximalen Schnitten von π und damit zu den Knoten des Faser-Polytops.

Für den allgemeinen Fall vermutet McDonald die Existenz eines 'gemischten' Faser-Polytops dessen Knoten zu den maximalen Lösungsmengen korrespondieren.



- 1) Überblick
- 2) Problemstellung
- 3) Algorithmus
- 4) Beispiel in zwei Variablen
- 5) Beweisskizze für zwei Variablen
- 6) Beispiel in mehreren Variablen
- 7) Faser-Polytope
- 8) **Gemischte Faser-Polytope**



Satz (McMullen '04, Khovanskii & Esterov '07). *Seien P_1, \dots, P_r Polytope in \mathbb{R}^N , sei $\lambda \in \mathbb{R}^N$ mit positiven Koordinaten und sei $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. Dann ist $\sum_{\pi}(\lambda_1 P_1 + \dots \lambda_r P_r)$ ein homogenes Polynom in λ vom Grad $M + 1$. Desweiteren existieren Polytope $M_{i_1 \dots i_r}$ so dass*

$$\sum_{\pi}(\lambda_1 P_1 + \dots \lambda_r P_r) = \sum_{i_1 + \dots + i_r = M + 1} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r} M_{i_1 \dots i_r} \cdot$$

Den Koeffizienten $M_{i_1 \dots i_r}$ bezeichnen wir als das gemischte Faser-Polytop $\sum_{\pi}(P_1, \dots, P_r)$.

