Zusammenfassung

Ziel der Diplomarbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Für beliebige* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *und Dirichlet Charaktere* χ *modulo* $4N$ *definiert*

$$\chi_1^2(\alpha) \sum_{\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathrm{e}^{2\pi i\, \tau\Delta} \sum_{\substack{a \in N\mathbb{Z},\, b \in N\mathbb{Z},\, c \in \frac{1}{4}\mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = N\Delta}} \chi_1(4c) \begin{Bmatrix} \mathrm{sign}(a_A) & , a_A c_A < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{a_A}{N} & , \substack{c_A = 0 \ and \\ 0 < a_A < N} \\ -\frac{1}{2} + \frac{c_A}{N} & , \substack{a_A = 0 \ and \\ 0 < c_A < N} \\ 0 & , \text{sonst} \end{Bmatrix}$$

die Fourier-Entwicklung bei $i\infty$ *einer Modulform vom Gewicht* $\frac{3}{2}$*, Stufe* $4N$ *und Nebentyp* χ*, wobei wir die folgende Notation verwendet haben:* $\chi_1 := \chi\left(\frac{-4N}{*}\right)$*,* $a_A = \alpha^2 a + \alpha\gamma b + \gamma^2 c$ *und* $c_A = \beta^2 a + \beta\delta b + \delta^2 c$*.*

In Kapitel 1 wird eine kurze Einführung in die Theorie der elliptischen Modulformen von ganzem und halbganzem Gewicht gegeben. Weiterhin werden die Sätze von Shimura und Niwa zitiert, welche den Zusammenhang zwischen Modulformen von ganzem und halbganzem Gewicht beschreiben. Darauf wird die Verwendung des Kronecker-Legendre-Symbols in dieser Arbeit erklärt, und es werden einige Eigenschaften der Hurwitz ζ-Funktion aufgeführt.

Das zweite Kapitel widmet sich der Analyse der folgenden Funktion:

$$\Theta(\tau, z) = \sqrt{\mathrm{Im}(\tau)} \sum_{a \in N\mathbb{Z},\, b \in N\mathbb{Z},\, c \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}} \bar{\chi}_1(4c) \frac{Q(z)}{\mathrm{Im}(z)^2} \mathrm{e}_N \left(\tau d_Q + 2i\mathrm{Im}(\tau) \frac{\widehat{Q}(z)^2}{\mathrm{Im}(z)^2} \right)$$

Wobei die Notationen $Q(z) := az^2 + bz + c$, $\widehat{Q}(z) := a|z|^2 + b\mathrm{Re}(z) + c$ und $d_Q := b^2 - 4ac$ verwendet werden.
Diese Funktion ist eine leichte Modifikation der Funktion $\theta(z, g)$ in [Niwa]. Es gelingt nun, mittels elementarer Methoden, der Beweis einer Transformationsformel in der zweiten Variablen für diese Funktion. Explizit zeigen wir

$$\Theta(\tau, Az) = \chi^2(\delta)(\gamma\bar{z} + \delta)^2 \Theta(\tau, z) \qquad \text{für } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2N) \ .$$

Um das Verhalten von $\Theta(\tau, z)$ bei Veränderungen in der ersten Variablen zu studieren sind wir gezwungen, stärkere Methoden zu verwenden. So zeigen wir in Abschnitt 2.3 mithilfe einer Transformationsformel von Borcherds

[Bor], dass

$$\Theta(B\tau, z) = \bar{\chi}(\delta)\left(\frac{N}{\delta}\right)j(B,\tau)^3\Theta(\tau, z) \quad \text{für } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$$

gilt. Hier bezeichnet $j(B,\tau)$ den Automorphiefaktor für Modulformen von halbganzem Gewicht.

Kapitel 3 behandelt den Beweis unseres Hauptsatzes. Im Wesentlichen geschieht dies, durch die Berechnung des Integrals

$$I_A(\tau) = \int_0^{i\infty} \Theta(\tau, Az)\overline{dAz} + \Theta(\tau, A^*z)\overline{dA^*z} \quad \text{mit } A^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix} .$$

Durch die Konstruktion ist klar, dass sich diese Funktion unter $\Gamma_0(4N)$ wie eine Modulform vom Gewicht $\frac{3}{2}$ transformiert. Das Erstaunliche bei der Berechnung ist nun, dass viele komplizierte Terme wegfallen und dass wir schlussendlich die recht einfache Formel vom Anfang erhalten. Um den Beweis des Satzes zu vollenden wenden wir erneut Borcherds Transformationsformel an, um die Holomorphie von $I_A(\tau)$ in allen Spitzen von $\Gamma_0(4N)$ zu zeigen.

In Kapitel 4 werden einige Beispiele zur Anwendung des Hauptsatzes diskutiert.

Offene Fragen: Für kleine Stufen N gewinnen wir mithilfe des Satzes ein volles Erzeugendensystem für $\mathrm{M}_{\frac{3}{2}}(N,\chi)$. Dies scheint für höhere Stufen nicht mehr möglich zu sein. Es stellt sich nun die Frage, ob man die restlichen Formen auf ähnliche Weise konstruieren kann, wenn mit einer etwas allgemeineren Funktion $\Theta_D(\tau, z)$ gestartet wird.
Ein weiteres mögliches Thema für eine spätere Arbeit ist die Verallgemeinerung unserer Formeln für beliebiges halbganzes Gewicht.

[Bor] Borcherds, Richard E.: Automorphic forms with singularities on Grassmannians (Inventiones mathematicae **132**, 491-562, 1998)
[Niwa] Niwa, Shinji: Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions (Nagoja mathematical Journal, **56**, 1975)