Diskrete und Algorithmische Geometrie
WS 2007/2008

Blatt 1 Abgabe: Do 25.10.07

Aufgabe 1.
Es seien $p_0, \ldots, p_n$ Punkte in $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $p_0, \ldots, p_n$ sind affin unabhängig.

ii) $p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0$ sind linear unabhängig.

iii) $\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 2.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Zeige:

$$\operatorname{conv} A = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvex}}} B .$$

Aufgabe 3.
Beweise den Satz von Helly: Seien $C_1, \ldots, C_n \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Mengen mit $n \geq d+1$, so dass $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = d+1$ gilt. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 4.
Eine *konische Kombination* von Punkten $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ ist ein Punkt der Form

$$p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{mit } \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Die *konische* (oder *positive*) *Hülle* pos A einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Menge aller konischen Kombinationen von Punkten in A.
Beweise den Satz von Carathéodory für konvexe Kegel: Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in \operatorname{pos} A$, dann lässt sich x als konische Kombination von höchstens $d+1$ Punkten darstellen.

Prof. Dr. Thorsten Theobald
Dipl.-Math. Reinhard Steffens
FB 12 - Institut für Mathematik
`http://www.math.uni-frankfurt.de/~steffens/algogeom/`

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN