Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 1 21.10.21

Aufgabe 1 (Teilbarkeit, 5 Punkte)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $6 \mid \big(n^3 - n\big)$;
(b) Ist n ungerade, so gilt $8 \mid \big(n^2 - 1\big)$;
(c) $5 \mid 6^n + 4$.

Aufgabe 2 (Größter gemeinsamer Teiler, 5 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1604, 2015)$ und $\mathrm{ggT}(420, 315, 234)$.
(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie, dass auch $\mathrm{ggT}(a + b, ab) = 1$ gilt.

Aufgabe 3 (Fibonacci-Folge und Euklidischer Algorithmus, 5 Punkte)**.**
Die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_2 := 1 \text{ und } a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}\,(a_{n+1}, a_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie viele Divisionen mit Rest benötigt der euklidische Algorithmus für $\mathrm{ggT}\,(a_{n+1}, a_n) = 1$?

Aufgabe 4 (Alternativer Beweis die für Unendlichkeit der Primzahlmenge, 5 Punkte)**.**
Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Sei $A_n := a^{2^n} + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt $A_n \mid A_m - 2$.
(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(A_m, A_n)$.
(c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Tipp: Betrachten Sie die Menge $\{2^{2^k} + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **29.10.21**, bis um 12:00 digital auf OLAT.